Chapitre 1

RAPPELS MATHEMATIQUES

Dans tout le chapitre : A chaque espace affine **ε**, *de dimension trois, on associe l'espace vectoriel* ***E*** *de dimension trois.*

1.1. Introduction

La Mécanique est une science qui a pour objet l'étude des mouvements et des actions qui les provoquent.

Pour résoudre des problèmes issus de la mécanique, Le mécanicien cherche à appliquer les lois mécaniques, qui nécessitent l'introduction des concepts tels que forces, vitesses, accélérations, etc.

La question fondamentale, qui vient tout de suite à l'esprit, est la suivante : *Comment caractériser les grandeurs physiques telles que forces, vitesses, accélérations, etc.* ?

Le plus simple est de se tourner vers les mathématiques et de chercher s'il existe un être mathématique qui possède les propriétés caractéristiques de ces grandeurs physiques. En effet, cet être mathématique existe : c'est ce qu'on appelle vecteur.

L'ensemble dans lequel appartient ce vecteur est appelé espace vectoriel, noté ***E***, de dimension trois. Cet espace est associé à un ensemble de points appelé espace affine, noté **ε**, de dimension trois, il représente l'espace physique dans lequel se produisent les phénomènes étudiés par la mécanique classique.

1.2. Notion de vecteurs

Un vecteur $\vec{V}$ est un segment de droite (Δ) sur lequel on distingue une origine et une extrémité. Si $A \in \varepsilon$ est l'origine du segment et $B \in \varepsilon$ son extrémité, le vecteur $\vec{V}$ sera noté : $\overrightarrow{AB}$

Ainsi, pour définir le vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$, il faut préciser :

1. Son origine : C'est le point ***A***
2. Sa direction : Celle de son support (Δ), qui n'est autre que la droite passant par les points ***A*** et ***B***.
3. Son sens : De ***A*** vers ***B*** (En général on dessine une flèche, d'origine ***A*** et d'extrémité ***B***.
4. Son module : C'est la longueur ***AB***, noté $\| \vec{V} \| = \| \overrightarrow{AB} \|$

L'emplacement des points ***A*** et ***B*** dans l'espace n'a pas d'importance. Deux déplacements de deux points d'origines distincts peuvent correspondre au même vecteur. Toutefois, il faut tenir compte de la longueur entre les deux points, de la direction (Δ) et du sens.

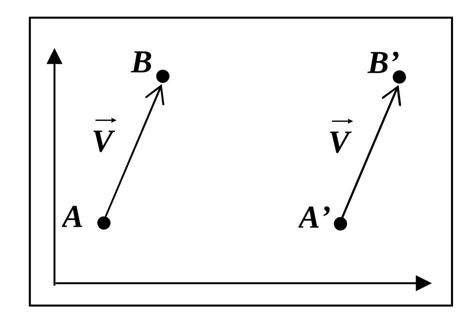


Fig. 1

Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont dits équipollents (égaux), car ils ont le même module, la même direction et le même sens.

1.2.1. Vecteur lié

On appelle vecteur lié, le couple (M, $\vec{V}$) constitué par un point M de ε et un vecteur $\vec{V}$ de E

C'est un vecteur dont l'origine ***M** est* fixe, la direction et le sens sont connus. La position d'un tel vecteur est complètement définie sur la droite (**Δ**). Un tel vecteur est défini de manière unique, car son origine et son extrémité sont fixes sur la droite (**Δ**).

Ce vecteur est utilisé en mécanique pour représenter une force, une vitesse, une accélération, etc.

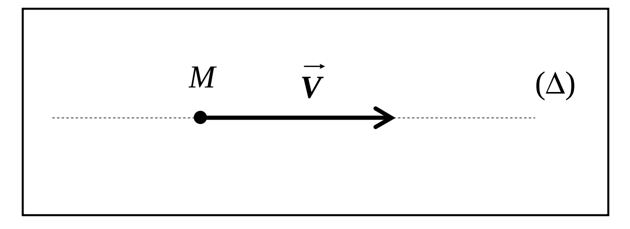


Fig.2

Généralement, nous aurons besoins dans nos calculs d'orienter la droite (**Δ**) par un vecteur unitaire $\vec{u}$ ($\|\vec{u}\| = 1$). Ainsi, le vecteur $\vec{V}$ peut être défini sur son support (**Δ**) orienté sous la forme :

$\vec{V} = V\vec{u}$ « où ***V*** est un réel »

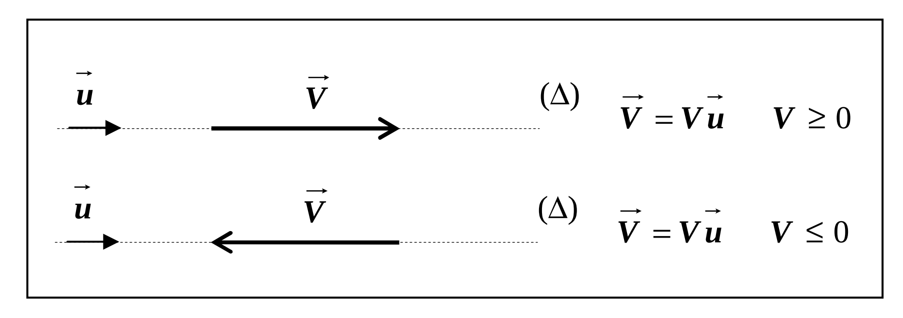


Fig.3

Deux vecteurs liés sont équipollents s'ils sont confondus (identiques)

1.2.2. Vecteur glissant (ou axial)

Un vecteur est dit glissant, si l'on impose son support (***Δ***). C'est un vecteur dont l'origine est un point quelconque de la droite (***Δ***), mais la direction, le sens et le module sont imposés.

Un tel vecteur peut glisser sur son support (***Δ***) pourvu que son module et son sens ne changent pas.

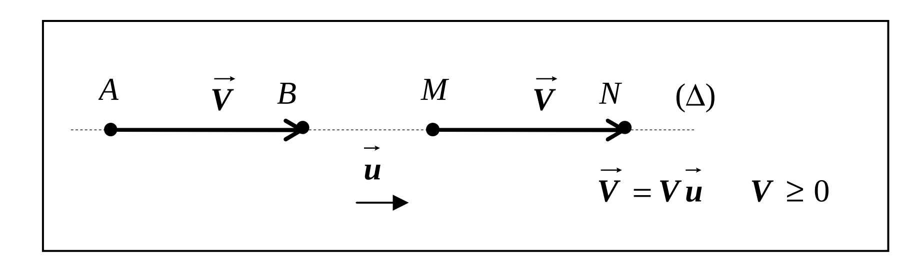


Fig.4

$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{MN}}$ sont des représentations du même vecteur $\vec{\boldsymbol{V}}$ glissant.

Ce vecteur peut être utilisé en mécanique pour représenter la vitesse de rotation autour d'un axe, etc.

1.2.3. Vecteur libre :

Un vecteur libre est un vecteur dont la direction, le sens et le module sont imposés par contre l'origine est le support sont quelconques. Un tel vecteur est défini à une translation arbitraire près.

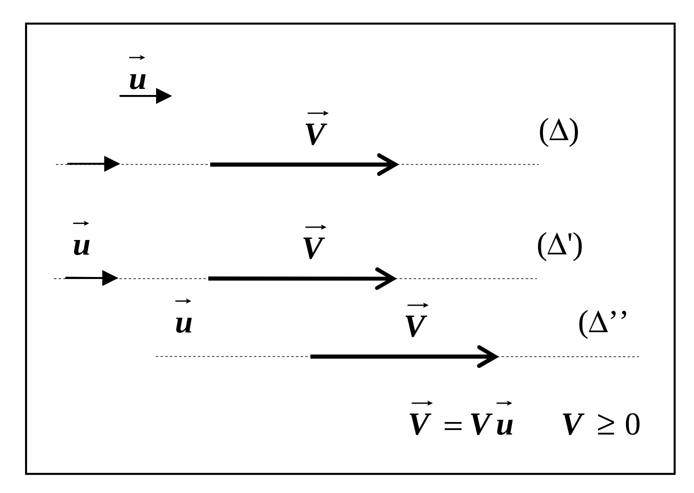


Fig.5

Ce vecteur est utilisé en mécanique pour représenter le champ de gravitation terrestre, etc.

1.3. Repère et coordonnées d'un vecteur

1.3.1. Base

Trois vecteurs $\vec{\boldsymbol{i}}$, $\vec{\boldsymbol{j}}$ et $\vec{\boldsymbol{k}}$ non nuls et non coplanaires forment une base de l'espace $\boldsymbol{E}$.

1.3.2. Repère cartésien

Soit un point ***O*** de l'espace affine **ε** et une base de trois vecteurs ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), dans l'espace vectoriel ***E***, alors le quadruplet ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) forme un repère cartésien de ***E***.

Remarque :

Soient quatre points non alignés ***O***, ***A***, ***B*** et ***C*** de l'espace affine **ε**, alors le quadruplet (***O***, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$) forme un repère cartésien de ***E***.

1.3.3. Coordonnées d'un vecteur

Soient une base de trois vecteurs ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) dans l'espace ***E*** et $\vec{V}$ un vecteur de ***E***, il existe un triplet unique de réels (***x***, ***y***, ***z***) tel que :

$$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

où :

$$\vec{V} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \qquad [1.1]$$

Avec : $\overrightarrow{AB} = x\vec{i}$; $\overrightarrow{BC} = y\vec{j}$; $\overrightarrow{CD} = z\vec{k}$

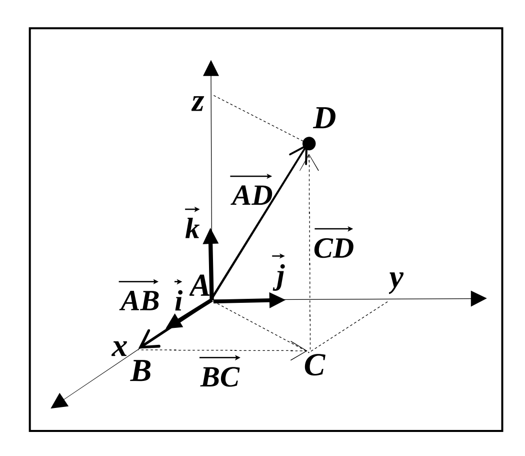


Fig.6

$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$ sont les coordonnées (composantes) du vecteur $\vec{V}$ dans la base ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont les projections de $\overrightarrow{AD}$ suivant les directions respectives de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

1.4. Produit scalaire

1.4.1. Définition

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, que l'on note $\vec{U} . \vec{V}$, la quantité scalaire définie par :

$$\vec{U} . \vec{V} = \|\vec{U}\| . \|\vec{V}\| \cos\theta \qquad [1.2]$$

En considérant la figure ci-dessus, avec : $\vec{U} = \overrightarrow{OA}$; $\vec{V} = \overrightarrow{OB}$ et $(\vec{U}, \vec{V}) = \theta$

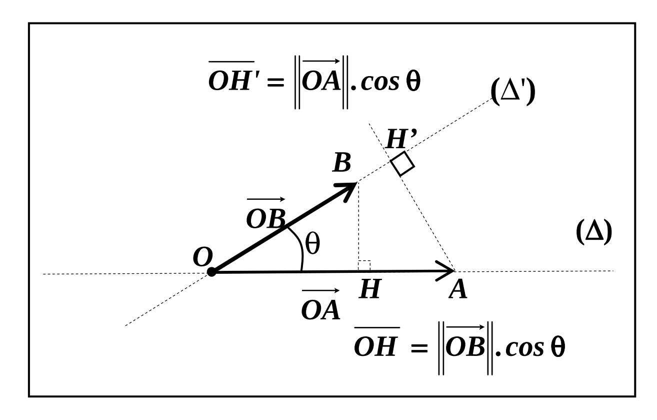


Fig.7

- Le point ***H*** (resp. ***H'***) est la projection du point ***B*** (resp. ***A***) sur l'axe Δ (resp. **Δ'**), support du vecteur $\vec{U} = \overrightarrow{OA}$ (resp. $\vec{V} = \overrightarrow{OB}$),
- La distance $\overline{OH}$ est prise sous forme algébrique et peut être positive ou négative suivant la valeur de l'angle **θ**.
- Le vecteur $\overrightarrow{OH}$ représente la projection du vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{OB}$ sur l'axe **Δ**.

Propriétés :

- Le module (norme) d'un vecteur $\vec{U}$ est positif et égale à la racine carrée de son produit scalaire par lui-même :

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{\vec{U}.\vec{U}}$$

- Le module d'un vecteur, égal à la somme de deux vecteurs, est égal à la racine carrée de la somme des produits scalaires

de chacun des vecteurs par lui même plus le double du produit scalaire de ces deux vecteurs.

En effet, en écrivant : $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$, on déduit :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}^2 = (\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}})^2 = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}^2 + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}}^2 + 2\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}.\overrightarrow{\boldsymbol{BC}} \qquad [1.3]$$

Ce qui est équivalent à :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}^2 = \|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\|^2 + \|\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}\|^2 + 2.\|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\|.\|\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}\|.cos(\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}, \overrightarrow{\boldsymbol{BC}}) \qquad [1.4]$$

$(\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}, \overrightarrow{\boldsymbol{BC}}) = \theta$

1.4.2. Repère orthogonal / orthonormé

Un repère ($\boldsymbol{O}$, $\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}$) est dit orthogonal si les vecteurs $\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}$ et $\vec{\boldsymbol{k}}$ sont orthogonaux, c'est à dire :

$$\vec{\boldsymbol{i}}.\vec{\boldsymbol{j}} = \vec{\boldsymbol{j}}.\vec{\boldsymbol{k}} = \vec{\boldsymbol{i}}.\vec{\boldsymbol{k}} = 0 \qquad [1.5]$$

Le repère est orthonormé si en plus les vecteurs $\vec{\boldsymbol{i}}$, $\vec{\boldsymbol{j}}$ et $\vec{\boldsymbol{k}}$ sont unitaire, c'est à dire :

$$\|\vec{\boldsymbol{i}}\| = \|\vec{\boldsymbol{j}}\| = \|\vec{\boldsymbol{k}}\| = 1$$

1.4.3. Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé

Dans un espace $\boldsymbol{E}$ muni d'un repère orthonormé $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$, on considère deux vecteurs $\vec{\boldsymbol{U}}$ et $\vec{\boldsymbol{V}}$ (fig. 5.), tels que :

$$\vec{U} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \ ; \ \vec{V} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} \qquad [1.6]$$

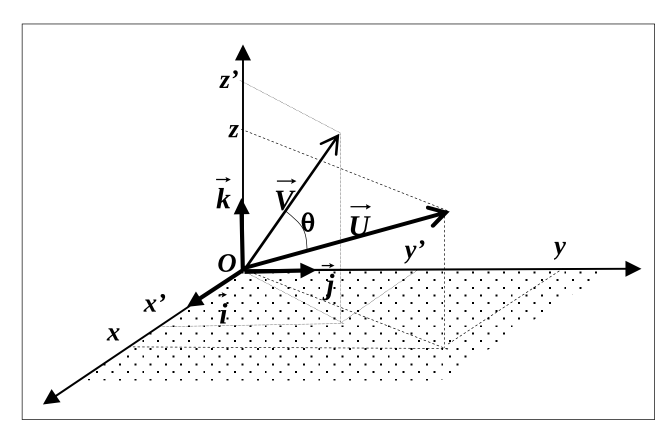


Fig.8

Le produit scalaire des vecteur $\vec{\boldsymbol{U}}$ et $\vec{\boldsymbol{V}}$ s'écrit sous la forme analytique :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = xx' + yy' + zz' \qquad [1.7]$$

La norme du vecteur $\vec{\boldsymbol{U}}$:

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad [1.8]$$

La norme du vecteur $\vec{\boldsymbol{V}}$:

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \qquad [1.9]$$

Si $\vec{U} \neq \vec{0}$ et $\vec{V} \neq \vec{0}$, la valeur de l'angle $\boldsymbol{\theta} = (\vec{U}, \vec{V})$ est telle que :

$$\cos\theta = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \qquad [1.10]$$

1.5. Produit vectoriel

1.5.1. Définition

On appelle produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, que l'on note $\vec{U} \wedge \vec{V}$, le vecteur $\vec{W}$ dont la norme est égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et qui est orienté perpendiculairement au plan formé par $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de manière que $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ forme une base directe :

$$\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{W}\| = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.\sin\theta \qquad [1.11]$$

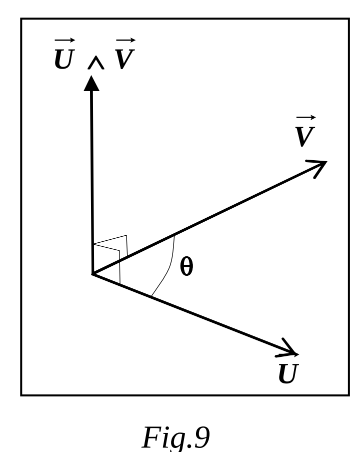


Fig.9

Remarquons que *:*

La base ($\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$) est directe, c'est à dire qu'on a :

$(\vec{U},\vec{V}) = \theta > 0$

$(\vec{V},\vec{W}) = (\vec{W},\vec{U}) = \frac{\pi}{2}$

Le produit vectoriel n'est pas commutatif :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U} \qquad [1.12]$$

Enfin, pour tout vecteur $\vec{A}$ non nul, le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition :

$$\vec{A} \wedge (\vec{U} + \vec{V}) = \vec{A} \wedge \vec{U} + \vec{A} \wedge \vec{V} \qquad [1.13]$$

1.5.2. Expression analytique du produit vectoriel dans un repère orthonormé

En considérant un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé, on voit tout de suite que :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \; ; \; \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \text{ et } \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \qquad [1.14.a]$$

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0} \; ; \; \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0} \text{ et } \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \qquad [1.14.b]$$

On considère deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, tels que :

$$\vec{U} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ et } \vec{V} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

Le calcul de l'expression analytique du produit vectoriel $\vec{U} \wedge \vec{V}$ se fait en utilisant le déterminant de la matrice d'ordre 3x3 « ci-dessous », dont la première ligne est formée par les vecteurs unitaires ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), la deuxième ligne formée par les composantes (***x*** , ***y*** , ***z***) du premier vecteur $\vec{U}$ et la troisième ligne formée par les composantes (***x'*** , ***y'*** , ***z'***) du second vecteur $\vec{V}$. Ainsi :

$$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix} \qquad [1.15.a]$$

$$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = (y.z' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k} \qquad [1.15.b]$$

On note dans cette expression la permutation circulaire sur les coordonnées des deux vecteurs, en passant d'une composante à l'autre du vecteur $\vec{W}$.

Remarque :

Nous pouvons retrouver l'expression analytique (ci-dessus) du produit vectoriel en utilisant l'écriture des vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ dans le repère ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) orthonormé sous la forme :

$$\vec{U} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \; ; \; \vec{V} = \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} \text{ et } \vec{W} = \begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{Bmatrix}$$

Ainsi :

$$\vec{W} = \begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{Bmatrix} = \vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix}$$

Par suite ; pour chaque composante du vecteur $\vec{W}$, nous masquons les composantes correspondantes des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et nous effectuons le produit croisé des quatre termes restants, en tenant comptes des signes + puis – dans nos calcul. Ceci se traduit de la façon suivante :

1ère composantes de $\vec{W}$: $x'' = (yz' - zy')$

Nous masquons les premières composantes de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et nous effectuons le produit en croix des composantes ***y***, ***z***, ***y'*** et ***z'*** restantes :

$$\begin{Bmatrix} x'' \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ y \\ z \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} \cdot \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} yz' - zy' \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}$$

2ème composantes de $\vec{W}$: $y'' = zx' - xz'$

Nous masquons les deuxièmes composantes de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et nous effectuons le produit en croix des composantes ***x***, ***z***, ***x'*** et ***z'*** restantes, en tenant compte du signe – « le signe – dans le premier produit puis le signe +.

$$\begin{Bmatrix} \cdot \\ y'' \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ \cdot \\ z \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} x' \\ \cdot \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ y'' \\ \cdot \end{Bmatrix}$$

3ème composantes de $\vec{W}$: $z'' = xy' - yx'$

Nous masquons les troisièmes composantes de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et nous effectuons le produit en croix des composantes ***x***, ***y***, ***x'*** et ***y'*** restantes.

$$\begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ z'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \cdot \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ z'' \end{Bmatrix}$$

1.5.3. Double produit vectoriel

Soient trois vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$:

Le double produit vectoriel de $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$, est un vecteur $\vec{W}$ vérifiant la relation :

$$\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 . \vec{V}_3)\vec{V}_2 - (\vec{V}_1 . \vec{V}_2)\vec{V}_3 \qquad [1.16]$$

En effet :

Soit : $\vec{U} = \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$

Le vecteur est nécessairement perpendiculaire à $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$.

Par suite, le vecteur $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{U}$ est perpendiculaire à $\vec{U}$.

On en déduit que $\vec{W}$ est dans le plan formé par $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$.

Donc, on peut écrire :

$\vec{W} = \alpha\vec{V}_2 + \beta\vec{V}_3$

où α et β sont à déterminer.

Sachant que $\vec{W}$ est perpendiculaire à $\vec{V}_1$, on déduit :

$\vec{V}_1.\vec{W} = 0 = \alpha\vec{V}_1.\vec{V}_2 + \beta\vec{V}_1.\vec{V}_3$

Soit : $\alpha\vec{V}_1.\vec{V}_2 = -\beta\vec{V}_1.\vec{V}_3$

Autrement : $\alpha = k\vec{V}_1.\vec{V}_3$ et $\beta = -k\vec{V}_1.\vec{V}_2$

Ce qui permet d'écrire, enfin :

$\vec{W} = k[(\vec{V}_1.\vec{V}_3)\,\vec{V}_2 - (\vec{V}_1.\vec{V}_2)\vec{V}_3]$

Pour montrer que $k = 1$, il suffit de développer le calcul en choisissant le cas particulier où $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$ et $\vec{V}_2$ perpendiculaire à $\vec{W}$ et en considérant que tous les vecteurs sont unitaires

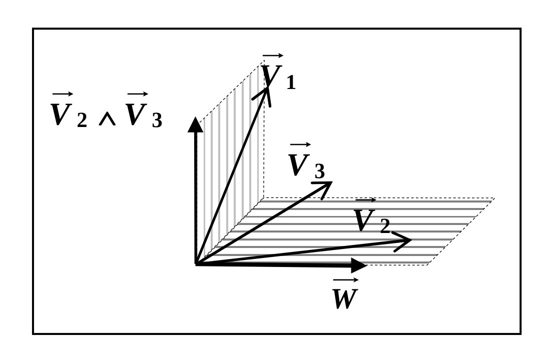


Fig.10

1.6. Produit mixte

1.6.1. Définition

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ la quantité scalaire, notée $(\vec{U},\vec{V},\vec{W})$, définie par :

$$(\vec{U},\vec{V},\vec{W}) = \vec{U}.(\vec{V} \wedge \vec{W}) \qquad [1.17]$$

Pour retrouver la forme analytique du produit mixte en fonction des composantes des trois vecteurs $\vec{U} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{V} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ et $\vec{W} = x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}$, on développe le déterminant d'une matrice dont la première ligne comporte les composantes algébrique de $\vec{U}$, la second celle de $\vec{V}$ et la troisième celle de $\vec{W}$:

$$(\vec{U},\vec{V},\vec{W}) = \vec{U}.(\vec{V} \wedge \vec{W}) = det\begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} \qquad [1.18]$$

Soit :

$$(\vec{U},\vec{V},\vec{W}) = x(y'z''-y''z') - y(x'z''-x''z') + z(x'y''-x''y') \qquad [1.19]$$

Remarques :

- Dans une permutation circulaire des trois vecteurs, le produit mixte est invariant :

$$(\vec{U},\vec{V},\vec{W}) = (\vec{W},\vec{U},\vec{V}) = (\vec{V},\vec{W},\vec{U}) \qquad [1.20]$$

- Une permutation de deux vecteurs change le signe du produit mixte, car le produit vectoriel n'est pas commutatif :

$$(\vec{U},\vec{V},\vec{W}) = -(\vec{V},\vec{U},\vec{W}) = -(\vec{U},\vec{W},\vec{V}) \qquad [1.21]$$

1.6.2 Signification géométrique du produit mixte

Le module du produit mixte, correspond au volume du parallélépipède déterminé par les trois vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$.

En effet, en partant de la définition du produit mixte :

$$(\vec{U},\vec{V},\vec{W}) = \vec{U}.(\vec{V} \wedge \vec{W}) = \vec{W}.(\vec{U} \wedge \vec{V})$$

D'une part, le module du produit vectoriel $(\vec{U} \wedge \vec{V})$ représente l'aire du parallélogramme (***ABCD***) construit par les vecteur $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

D'autre part, en posant $\vec{A} = (\vec{U} \wedge \vec{V})$, on aura :

$$\|(\vec{U},\vec{V},\vec{W})\| = \|\vec{A}\|.\|\vec{W}\|\cos(\vec{A},\vec{W})$$

La relation ci-dessus n'est autre que le volume du parallélépipède déterminé par les trois vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$.

La quantité $\|\vec{W}\|\cos(\vec{A},\vec{W})$ représente la projection de $\vec{W}$ sur le support du vecteur $\vec{A}$, ayant pour mesure $AH = h$.

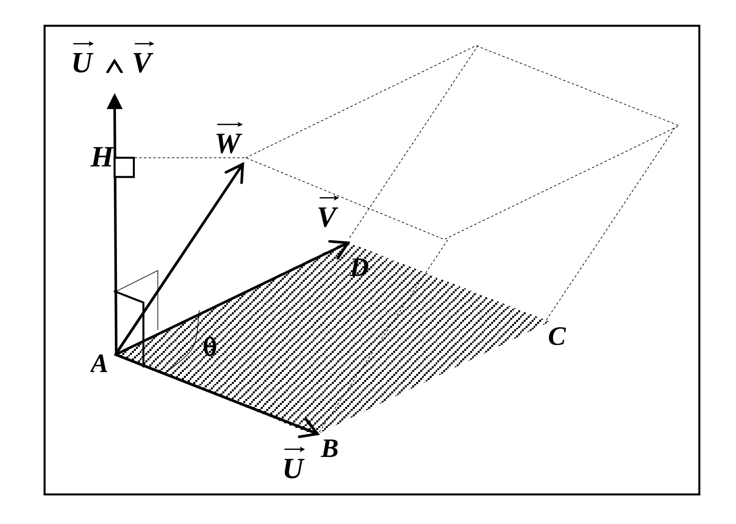


Fig.11

1.7. Division vectorielle

Etant donné deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, peut-on trouver un vecteur $\vec{X}$ tel que :

$$\vec{U} \wedge \vec{X} = \vec{V} \qquad [1.22]$$

En multipliant scalairement, par le vecteur $\vec{U}$, les deux membres de cette relation, nous aurons la relation :

$$\vec{U}.(\vec{U} \wedge \vec{X}) = \vec{U}.\vec{V} \qquad [1.23]$$

Il est évident que l'équation [1.22] n'admettra de solution que si : $\vec{U}.\vec{V} = 0$, car le produit scalaire $\vec{U}.(\vec{U} \wedge \vec{X})$, formant le premier membre de l'équation, est toujours nul.

Dans cette condition, deux cas se présentent :

i) Cas où $\vec{U}.\vec{V} = 0$ et $\vec{U} = \vec{0}$

Dans ce cas tout vecteur $\vec{X}$ est solution de l'équation [1.23], à condition que le vecteur $\vec{V} = 0$. En effet :

d'une part : si $\vec{U} = \vec{0}$, alors $(\vec{U} \wedge \vec{X}) = \vec{0}$, pour tout vecteur $\vec{X}$.

D'autre part l'équation [1.22] ne peut être vérifiée que : si $\vec{V} = 0$.

Dans le cas contraire cette équation n'admet pas de solution.

ii) Cas où $\vec{U}.\vec{V} = 0$ et $\vec{U} \neq \vec{0}$

Dans ce cas, nous supposons que l'équation [1.22] admet une solution particulière $\vec{X}_0$ tel que :

$$\vec{U} \wedge \vec{X}_0 = \vec{V} \qquad [1.24]$$

En soustrayant [1.24] de [1.22], nous aurons :

$$\vec{U} \wedge (\vec{X}_0 - \vec{X}) = 0$$

On déduit que : $\vec{X}_0 - \vec{X} = k\vec{U}$, k est un nombre réel.

Par suite, la solution générale de l'équation [1.22] est :

$$\vec{X}_0 = \vec{X} + k\vec{U} \text{ , k est un nombre réel} \qquad [1.25]$$

Par ailleurs, nous pouvons choisir la solution particulière de [1.22] sous la forme : $\vec{X}_0 = \vec{U} \wedge \vec{V}$

Ceci nous permet d'écrire :

$$\vec{U} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{V}) = \vec{V} \qquad [1.26]$$

En utilisant la relation [1.16] du double produit vectoriel, il vient :

$$\vec{U} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{V}) = \vec{V} = (\vec{U} . \vec{V})\vec{U} - (\vec{U} . \vec{U})\vec{V} = -\|\vec{U}\|^2 \vec{V} \qquad [1.27]$$

En écrivant la relation ci-dessus sous la forme :

$$\vec{U} \wedge \frac{\vec{U} \wedge \vec{V}}{\|\boldsymbol{V}\|^2} = -\vec{V} \qquad [1.28]$$

Et en comparant à [1.24], nous déduisons la solution particulière sous la forme :

$$\vec{X}_0 = -\frac{\vec{U} \wedge \vec{V}}{\|\boldsymbol{V}\|^2} \qquad [1.29]$$

Ainsi, la solution générale s'écrit :

$$\vec{X} = -\frac{\vec{U} \wedge \vec{V}}{\|V\|^2} + k\vec{V} \qquad [1.30]$$

1.8. Moment d'un vecteur lié

1.8.1. Moment par rapport à un point O

Considérons un vecteur lié (M, $\vec{V}$) et un point $O \in \varepsilon$.

On appelle moment en P du vecteur $\vec{V}$, le vecteur noté $\vec{\mathcal{M}}_s(O)$ tel que :

$$\vec{\mathcal{M}}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V} \qquad [1.31]$$

En ce référant à la figure 12 ci-dessous, on voit clairement que le module du moment par rapport à O a pour valeurs :

$$\|\vec{\mathcal{M}}(O)\| = OM.\|\vec{V}\| sin\theta = OH.sin\theta \qquad [1.32]$$

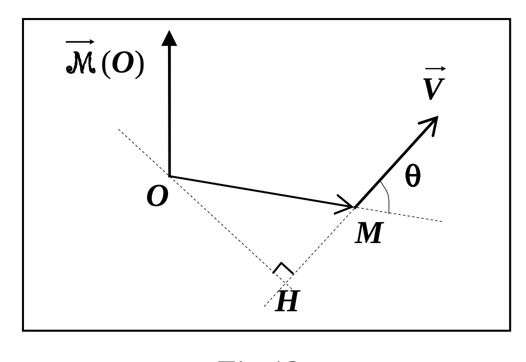


Fig.12

1.8.2. Moment par rapport à un axe (Δ)

Le moment du vecteur (M, $\vec{V}$) par rapport à l'axe (Δ) est la projection du moment d'un point O de la droite (Δ) sur elle-même.

En effet, en considérant la droite (Δ) orientée par un vecteur unitaire $\vec{u}$ ($\|\vec{u}\| = 1$), le moment de (M, $\vec{V}$) par rapport à l'axe (Δ) est défini par le produit scalaire :

$$\mathcal{M}_\Delta = \vec{u}\,.\,\vec{\mathcal{M}}(O) = \vec{u}\,.(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}) \qquad [1.33]$$

$\|\overrightarrow{OM}\|$ constitue la distant entre le prolongement de la droite portant le vecteur $\vec{V}$ et l'axe (Δ). Le moment par rapport à (Δ) ne dépend pas du point choisi sur l'axe. En effet, en choisissant un autre point ***O'*** de (Δ), nous aurons :

$$\mathcal{M}_\Delta = \vec{u}\,.(\overrightarrow{O'M} \wedge \vec{V}) = \vec{u}.(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}) \wedge \vec{V}$$

$$= \vec{u}.(\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{V}) + \vec{u}.(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V})$$

$$= \vec{u}.(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V})$$

Car : $\vec{u}.(\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{V}) = \vec{0}$, du fait que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{O'O}$ sont colinéaires.

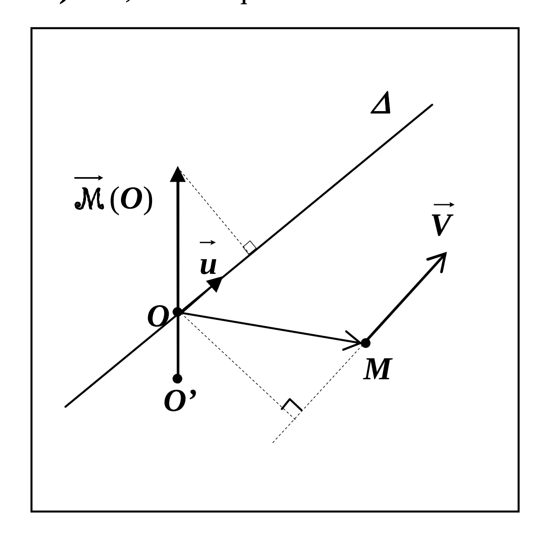


Fig.13

1.9. Résultante d'un système de N vecteurs liés

Souvent, nous avons besoin de raisonner sur un ensemble dénombrable de vecteurs $\vec{V}_i$ liés à des points M_i.

A titre d'exemple, imaginons, comme dans la figure 14 ci-dessous, un solide soumis à un ensemble de forces F_i,, chacune étant appliquée en un point donné M_i.

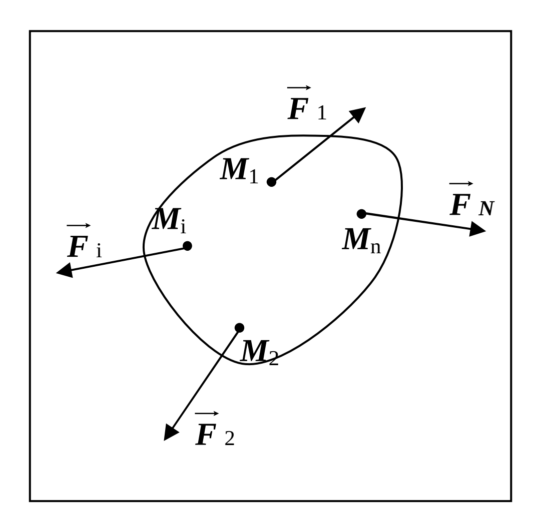


Fig.14

Le traitement du problème nécessitera le raisonnement sur un système (S) de N vecteurs liés.

Ainsi, on définit ce système comme un ensemble constitué de couples (M_i , $\vec{F}_i$) :

$(S) = \{(M_1 , \vec{F}_1), (M_2 , \vec{F}_2), \ldots , (M_i , \vec{F}_i), \ldots , (M_N , \vec{F}_N)\}$,

L'action de tous ces vecteurs est réduite à leur résultante qui est la sommation des effets de tous les vecteurs. Ainsi, Nous définissons

le premier élément de réduction de notre système (***S***) qui est la résultante noté :

$$\vec{\mathfrak{R}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \qquad [1.34]$$

1.10. Champ de moments d'un système de N vecteurs liés

On appelle moment, en un point $P \in \mathcal{E}$, d'un système (S) de ***N*** vecteurs liés (M_i , $\vec{V}_i$), le vecteur noté $\vec{\mathcal{M}}_s(P)$ tel que :

$$\vec{\mathcal{M}}_s(P) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{PM}_i \wedge \vec{V}_i \qquad [1.35]$$

1.10.1. Propriété fondamentale du champ $\vec{\mathcal{M}}_s(P)$

En considérant deux point ***A*** et ***P*** différents et développant le calcul de $\vec{\mathcal{M}}_s(P)$, nous aurons :

$$\vec{\mathcal{M}}_s(P) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{PM}_i \wedge \vec{V}_i = \sum_{i=1}^{N} (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM}_i) \wedge \vec{V}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{PA} \wedge \vec{V}_i + \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{V}_i$$

$$= \overrightarrow{PA} \wedge \sum_{i=1}^{N} \vec{V}_i + \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{V}_i$$

$$= \overrightarrow{PA} \wedge \vec{\mathfrak{R}} + \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{V}_i$$

$$= \overrightarrow{PA} \wedge \vec{\Re} + \vec{\mathcal{M}}_s(P)$$

On déduit, la propriété fondamentale qui stipule que :

Pour deux points P, A quelconques de ε et la résultante $\vec{\Re}$ d'un système de N vecteurs liés, on a :

$$\vec{\Re} = \sum_{i=1}^{N} \vec{V}_i$$

$$\vec{\mathcal{M}}_s(P) = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{\Re} + \vec{\mathcal{M}}_s(A)$$ Relation de transport

$\vec{\Re}$ et $\vec{\mathcal{M}}_s(P)$ constituent les éléments de réduction en P du système

1.10.2. Cas particulier d'un vecteur lié unique

En se donnant un système constitué d'un seul vecteur (M , $\vec{V}$), il est évident que le moment de ce système en un point P se réduit au moment du vecteur $\vec{V}$ qui n'est autre que : $\vec{\mathcal{M}}(P) = \overrightarrow{PM} \wedge \vec{V}$

Ce moment est toujours perpendiculaire au vecteur $\vec{V}$ qui forme la résultante du système.

Par ailleurs, le moment $\vec{\mathcal{M}}(A)$ pour tout point A, appartenant à la droite supportant le vecteur $\vec{V}$, est nul.

1.11. Equivalence de deux systèmes de vecteurs liés (S) et (S')

Deux systèmes (S) et (S') sont équivalents s'ils ont :

- même résultante : $\vec{\Re} = \vec{\Re}$
- même moment en un point P : $\vec{\mathcal{M}}_s(P) = \vec{\mathcal{M}}_{s'}(P)$

Ceci constitué, bien entendu, une relation d'équivalence.

Une classe d'équivalence sur l'ensemble des vecteurs liés sera appelée un *torseur*.

Les torseurs sont des outils de modélisations analogues aux vecteurs, utilisés par les mécaniciens pour représenter les actions mécaniques spécifiques de plusieurs familles de vecteurs « vitesses, moments..). Leur domaine d'emploi privilégié concerne les études des mécanismes dans l'espace faisant intervenir des liaisons mécaniques complexes.

1.12. Torseur

1.12.1. Définition

On se donne un torseur τ, en un point ***M***, en se donnant :

- Un vecteur libre $\vec{\mathfrak{R}}$ « résultante »
- Un champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathcal{M}_\tau}(\boldsymbol{M})$ « Moment en ***M*** de τ »
- Satisfaisant : la relation de transport, quelques soient les points ***M***, ***P*** $\in \varepsilon$:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_\tau}(\boldsymbol{P}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_\tau}(\boldsymbol{M}) + \overrightarrow{\boldsymbol{PM}} \wedge \vec{\mathfrak{R}}$$

1.12.2. Eléments de réduction d'un torseur τ en un point

Pour connaître un torseur τ, à n'importe quel point ***M*** de ε, il suffit de connaître, en un point ***A***, le couple : ($\vec{\mathfrak{R}}$, $\overrightarrow{\mathcal{M}_\tau}(\boldsymbol{A})$). « la résultante et le champ de moment au point ***A*** ». Ainsi, en utilisant la relation de transport, on déduit le moment à chaque point ***M*** $\in \varepsilon$:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_\tau}(\boldsymbol{M}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_\tau}(\boldsymbol{A}) + \overrightarrow{\boldsymbol{MA}} \wedge \vec{\mathfrak{R}}$$

Le couple ($\vec{\mathfrak{R}}$, $\vec{\mathcal{M}}_\tau(\boldsymbol{A})$) forme les éléments de réduction du torseur τ au point ***A***.

Le couple ($\vec{\mathfrak{R}}$, $\vec{\mathcal{M}}_\tau(\boldsymbol{M})$) forme les éléments de réduction du torseur τ au point ***M***.

1.12.3. Egalité de deux torseurs

Deux torseurs τ et τ' sont égaux, s'ils ont la même résultante et le même champ de moments, au même point :

$$\vec{\mathfrak{R}} = \vec{\mathfrak{R}}'$$

$$\vec{\mathcal{M}}_\tau(\boldsymbol{M}) = \vec{\mathcal{M}}_{\tau'}(\boldsymbol{M})$$

Théorème 1

Deux torseurs sont égaux s'ils ont le même champ de moments « l'égalité des résultantes n'est pas nécessaire »

Théorème 2

Deux torseurs τ et τ' sont égaux si en un même point de ε, ils possèdent les mêmes éléments de réduction

1.13. Comoment de deux torseurs τ et τ'

1.13.1. Définition

On appelle comoment de deux torseurs τ et τ' le scalaire défini par :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{M}) = \vec{\mathcal{M}}_\tau(\boldsymbol{M}).\vec{\mathfrak{R}}' + \vec{\mathcal{M}}_{\tau'}(\boldsymbol{M}).\vec{\mathfrak{R}} \qquad [1.36]$$

1.13.2. Invariant scalaire d'un torseur τ

Soit un torseur τ donné, au point $\boldsymbol{M}$, par ses éléments de réduction ($\vec{\mathfrak{R}}$, $\vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M})$).

On appelle invariant scalaire du torseur τ la quantité scalaire :

$\boldsymbol{h} = \vec{\mathfrak{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M})$ « *indépendant du point* ***M*** » [1.37]

On obtient l'invariant scalaire du torseur τ en calculant le comoment de τ par lui-même, en un point où on connaît les éléments de réduction de τ.

1.13.3. Invariant vectoriel d'un torseur τ

Soit un torseur τ donné par ses éléments de réduction ($\vec{\mathfrak{R}}$, $\vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M})$) «$\vec{\mathfrak{R}}$ n'est pas nul »

On appelle invariant vectoriel du torseur τ la projection orthogonale de $\vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M})$ sur $\vec{\mathfrak{R}}$. « qui est un vecteur indépendant du point ***M*** ».

En effet, on peut décomposer le moment $\vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M})$ en deux composantes : l'une $\vec{\mathcal{M}}_N$ normale à $\vec{\mathfrak{R}}$ et l'autre $\vec{\mathcal{M}}_T$ parallèle à $\vec{\mathfrak{R}}$:

$\vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M}) = \vec{\mathcal{M}}_N + \vec{\mathcal{M}}_T$

En posant : $\vec{\mathcal{M}}_T = \lambda \vec{\mathfrak{R}}$,

et en tenant compte de : $\boldsymbol{h} = \vec{\mathcal{M}}_T \vec{\mathfrak{R}} = \lambda \vec{\mathfrak{R}}^2$

Avec : $\lambda = \dfrac{\boldsymbol{h}}{\vec{\mathfrak{R}}^2}$

On obtient :

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_T = \dfrac{\mathbf{h}}{\overrightarrow{\mathfrak{R}}^2}\overrightarrow{\mathfrak{R}}$ « *Invariant vectoriel, indépendant de* ***M*** » [1.38]

Enfin, on peut écrire le moment au point ***M***, sous la forme :

$\overrightarrow{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_N + \overrightarrow{\mathcal{M}}_T = \overrightarrow{\mathcal{M}}_N + \dfrac{\boldsymbol{h}}{\overrightarrow{\mathfrak{R}}^2}\overrightarrow{\mathfrak{R}}$ [1.39]

Seule la partie normale $\overrightarrow{\mathcal{M}}_N$ dépend de ***M***.

1.14. Torseurs particuliers d'invariants scalaires nuls

Soit un torseur $\boldsymbol{\tau}$ donné par ses éléments de réduction ($\overrightarrow{\mathfrak{R}}, \overrightarrow{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M})$), de telle sorte que son invariant scalaire $\boldsymbol{h} = \overrightarrow{\mathfrak{R}} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M}) = 0$

1.14.1. Torseur nul

Il est défini en un point ***A*** par : $(\overrightarrow{\mathfrak{R}} = \vec{0}\ ,\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(\boldsymbol{A}) = \vec{0})$

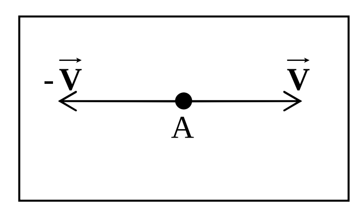


Fig.15

Par suite : $\forall\ \boldsymbol{M},\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(\boldsymbol{A}) + \overrightarrow{\boldsymbol{MA}} \wedge \overrightarrow{\mathfrak{R}} = \vec{0}$

1.14.2. Couple

Il est défini en un point ***A*** par : $(\overrightarrow{\mathfrak{R}} = \vec{0}\ ,\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(\boldsymbol{A}) = \vec{\mathbf{C}} \neq \vec{0})$

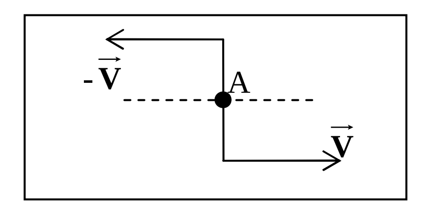


Fig.16

Ainsi : $\forall M \in \varepsilon$, $\overrightarrow{\mathcal{M}}(M) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) + \overrightarrow{\mathbf{MA}} \wedge \vec{\mathfrak{R}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) = \vec{\mathbf{C}}$

1.14.3. Glisseur

C'est un torseur défini en un point ***A*** par : $\vec{\mathfrak{R}} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}(\boldsymbol{A})$ est tel que : $\vec{\mathfrak{R}} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) = 0$

On sait qu'il existe une infinité de vecteurs liés uniques, ayant pour éléments de réductions en un point ***A*** la résultante $\vec{\mathfrak{R}}$ et le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}(\boldsymbol{A})$. En se référant à la figure 17, cette affirmation devient évidente en liant le vecteur $\vec{\mathfrak{R}}$ à un point ***P*** appartenant à la droite parallèle à $\vec{\mathfrak{R}}$ et passant par $\boldsymbol{P_0}$, de telle sorte que :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AP_0}} = \frac{\vec{\mathfrak{R}} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}}(\boldsymbol{A})}{\vec{\mathfrak{R}}^2}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = \frac{\vec{\mathfrak{R}} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}}(\boldsymbol{A})}{\vec{\mathfrak{R}}^2} + \lambda \vec{\mathfrak{R}}$$

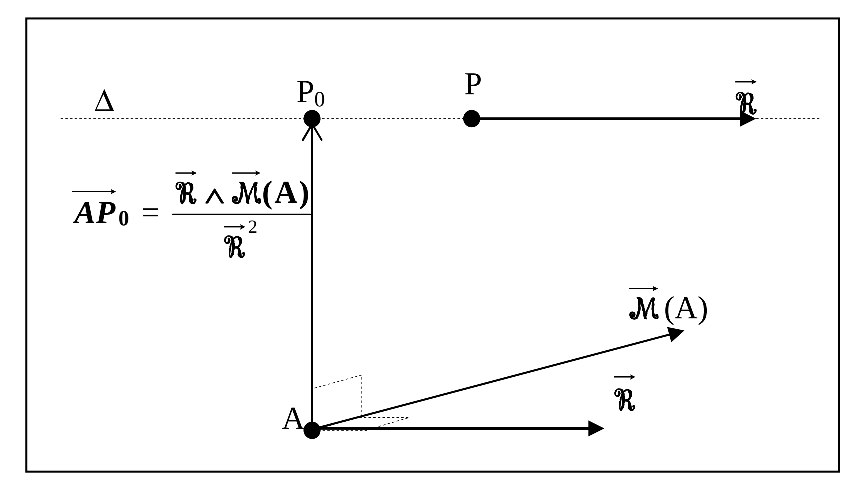


Fig.17

Remarque :

1. Pour tout point $M \in \Delta$, $\vec{\mathcal{M}}(M) = \vec{0}$
2. Si on avait défini le torseur en A par : $\vec{\mathfrak{R}} \neq \vec{0}$ et $\vec{\mathcal{M}}(A) = 0$, on peut toujours trouver un point B tel que :

   $\vec{\mathcal{M}}(B) = \vec{\mathcal{M}}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\mathfrak{R}} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\mathfrak{R}} \neq \vec{0}$ « à priori »
   ce qui permet de déduire : $\vec{\mathcal{M}}(B).\vec{\mathfrak{R}} = \vec{0}$

1.15. Axe central d'un torseur de résultante $\vec{\mathfrak{R}} \neq \vec{0}$

1.15.1. Définition

On appelle axe central d'un torseur $\boldsymbol{\tau}$ de résultante $\vec{\mathfrak{R}} \neq \vec{0}$ le lieu des points M de $\boldsymbol{\varepsilon}$ tel que : $\vec{\mathcal{M}}(M)$ est parallèle à $\vec{\mathfrak{R}}$.

On démontre que ce lieu est une droite.

1.15.2. Démonstration analytique

Soit le torseur τ de résultante $\vec{\mathfrak{R}} \neq \vec{0}$, donné par ses éléments de réduction en un point M : ($\vec{\mathfrak{R}}$, $\vec{\mathcal{M}}(M)$). Dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ cartésien, le vecteur position et le moment en O s'écrivent :

$$\overrightarrow{OM} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3$$

$$\vec{\mathcal{M}}(O) = M_1 \cdot \vec{e}_1 + M_2 \cdot \vec{e}_2 + M_3 \cdot \vec{e}_3$$

$$\vec{\mathcal{M}}(M) = \vec{\mathcal{M}}(O) + \overrightarrow{MO} \wedge \vec{\mathfrak{R}} = \vec{\mathcal{M}}(O) + \vec{\mathfrak{R}} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\vec{\mathcal{M}}(M) = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1 + R_2 x_3 - R_3 x_2 \\ M_2 + R_3 x_1 - R_1 x_3 \\ M_3 + R_1 x_2 - R_2 x_1 \end{Bmatrix}$$

On cherche, les points M tels que : $\vec{\mathfrak{R}} \ // \ \vec{\mathcal{M}}(M)$

$$\frac{M_1 + R_2 x_3 - R_3 x_2}{R_1} = \frac{M_2 + R_3 x_1 - R_1 x_3}{R_2} = \frac{M_3 + R_1 x_2 - R_2 x_1}{R_3}$$

Ce sont les équations d'une droite, qui n'est autre que l'axe central de τ.

1.15.3. Propriétés d'axe central

a) $\forall M \in \Delta$, $\vec{\mathcal{M}}(M) = \dfrac{h}{\vec{\mathfrak{R}}^2} \vec{\mathfrak{R}}$. Le moment est constant le long de l'axe central.

En effet, on sait qu'en tout point de l'espace on a :

$$\vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M}) = \vec{\mathcal{M}}_N + \vec{\mathcal{M}}_T$$

Si $\boldsymbol{M} \in \Delta$ $\quad \vec{\mathcal{M}}_N = \vec{0}$

Et $\quad \vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M}) = \vec{\mathcal{M}}_T = \dfrac{\mathbf{h}}{\vec{\mathfrak{R}}^2}\vec{\mathfrak{R}}$

b) Le long de l'axe central, la norme $\|\vec{\mathcal{M}}(M)\|$ est minimale « cette propriété pourrait servir de définition de l'axe central ».

En un point ***M*** quelconque :

$$\|\vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M})\|^2 = \|\vec{\mathcal{M}}_N\|^2 + \|\vec{\mathcal{M}}_T\|^2$$

Si $\boldsymbol{M} \in \Delta$ $\quad \vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M}) = \vec{\mathcal{M}}_T = \dfrac{\mathbf{h}}{\vec{\mathfrak{R}}^2}\vec{\mathfrak{R}}$

$$\|\vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M})\|^2 = \|\vec{\mathcal{M}}_T\|^2 \text{ « minimal »}$$

c) L'axe central d'un glisseur est l'axe du glisseur lui même

En effet, sur l'axe d'un glisseur on a : $\vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M}) = \vec{0}$, ce qui explique que la norme du moment est minimale

d) L'axe central est parallèle à $\vec{\mathfrak{R}}$

Démonstration :

$$\forall\, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in \mathcal{E},\ \vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M}) = \vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{N}) + \overrightarrow{\boldsymbol{MN}} \wedge \vec{\mathfrak{R}}$$

$$\text{Si } \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in \Delta,\ \vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M}) = \vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{N}) = \frac{\boldsymbol{h}}{\vec{\mathfrak{R}}^2}\vec{\mathfrak{R}}$$

$$\text{Soit : } \overrightarrow{\boldsymbol{MN}} \wedge \vec{\mathfrak{R}} = \vec{0} \quad \forall\, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in \Delta$$

1.16. Opérations sur les torseurs

1.16.1. Addition de deux torseurs

Soient deux torseurs τ_1 et τ_2 donnés par leurs éléments de réduction, en un même point $A \in \varepsilon$:

$\tau_1(\vec{\mathcal{R}}_1 , \vec{\mathcal{M}}_{\tau_1}(A))$; $\tau_2(\vec{\mathcal{R}}_2 , \vec{\mathcal{M}}_{\tau_2}(A))$

La somme des deux torseurs τ_1 et τ_2 est un torseur τ noté :

$\tau = \tau_1 + \tau_2$, dont les éléments de réduction sont : $(\vec{\mathcal{R}} , \vec{\mathcal{M}}_\tau)$.

Avec : $\vec{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{R}}_1 + \vec{\mathcal{R}}_2$

$\vec{\mathcal{M}}_\tau(A) = \vec{\mathcal{M}}_{\tau_1}(A) + \vec{\mathcal{M}}_{\tau_2}(A)$

1.16.2. Produit d'un torseur par un scalaire

Soit le torseur τ donné par ses éléments de réduction, en un même point $A \in \varepsilon$: $\tau(\vec{\mathcal{R}} , \vec{\mathcal{M}}_\tau(A))$

On appelle produit de τ par un réel λ, le torseur noté $\lambda\tau$ dont les élément de réduction sont : $\lambda\tau(\lambda\vec{\mathcal{R}} , \lambda\vec{\mathcal{M}}_\tau(A))$

Remarque :

L'ensemble des torseurs muni des opérations d'addition et de multiplication, forme un espace vectoriel.

1.17. Décomposition canonique d'un torseur en la somme d'un glisseur et d'un couple

Considérons un torseur $\boldsymbol{\tau}$ de résultante $\vec{\mathfrak{R}} \neq \vec{0}$ dont on connaît son invariant scalaire et son axe central.

Théorème

Etant donné un torseur $\boldsymbol{\tau}$ de résultante $\vec{\mathfrak{R}} \neq \vec{0}$.

- Si $\boldsymbol{h} \neq 0$; le torseur $\boldsymbol{\tau}$ se décompose en la somme d'un glisseur de résultante $\vec{\mathfrak{R}}$ d'axe central Δ et d'un couple de moment égal à $\frac{\mathbf{h}}{\vec{\mathfrak{R}}^2}\vec{\mathfrak{R}}$
- Si $\boldsymbol{h} = 0$; le torseur $\boldsymbol{\tau}$ est un glisseur noté : $\mathcal{G}(\Delta, \vec{\mathfrak{R}})$

Démonstration

Considérons l'axe central $\boldsymbol{\Delta}$ d'un torseur $\boldsymbol{\tau}$ et $\boldsymbol{P}$ un point de cet axe.

Les éléments de réduction de $\boldsymbol{\tau}$ en $\boldsymbol{P}$ sont :

$$\boldsymbol{\tau}\begin{Bmatrix} \vec{\mathfrak{R}} \\ \\ \dfrac{\boldsymbol{h}}{\vec{\mathfrak{R}}^2}\vec{\mathfrak{R}} \end{Bmatrix}$$

On peut donc écrire :

$$\tau \text{ en } P \begin{Bmatrix} \vec{\mathfrak{R}} \\ \\ \dfrac{h}{\vec{\mathfrak{R}}^2}\vec{\mathfrak{R}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{\mathfrak{R}} \\ \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \\ \dfrac{h}{\vec{\mathfrak{R}}^2}\vec{\mathfrak{R}} \end{Bmatrix}$$

$$\tau \text{ en P =glisseur } \mathcal{G}(\Delta, \vec{\mathfrak{R}}) + \text{ Couple } \mathcal{C}\left(\frac{\mathbf{h}}{\vec{\mathfrak{R}}^2}\vec{\mathfrak{R}}\right)$$

1.18. Champ vectoriel équiprojectif

1.18.1. Définition

Un champ de vecteur $\vec{\mathbf{V}}(M)$ est équiprojectif si,

$\forall M, N \in \varepsilon$, on a : $\vec{\mathbf{V}}(M).\overline{MN} = \vec{\mathbf{V}}(N).\overline{MN}$

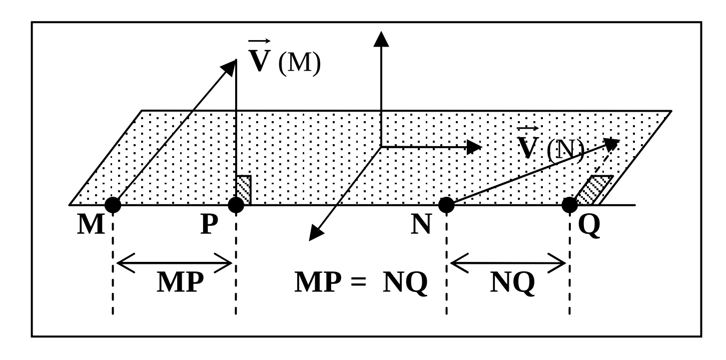


Fig.18

1.18.2. Application aux torseurs

Théorème

Le champ de moments d'un torseur est équiprojectif et, réciproquement, tout champ de vecteurs équiprojectif peut être considéré comme un torseur.

Démonstration

Soit un torseur τ de résultante $\vec{\mathfrak{R}}$ et de champ de moments $\vec{\mathcal{M}}_\tau(M)$

$\forall M, N \in \varepsilon$, on a : $\vec{\mathcal{M}}_\tau(M) = \vec{\mathcal{M}}_\tau(N) + \overrightarrow{MN} \wedge \vec{\mathfrak{R}}$

$$\vec{\mathcal{M}}_\tau(M) \cdot \overrightarrow{\mathbf{MN}} = \vec{\mathcal{M}}_\tau(N) \cdot \overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{MN} \wedge \vec{\mathfrak{R}}) \cdot \overrightarrow{MN}$$

$$= \vec{\mathcal{M}}_\tau(N) \cdot \overrightarrow{MN} + 0$$

Soit : $\vec{\mathcal{M}}_\tau(M) \cdot \overrightarrow{MN} = \vec{\mathcal{M}}_\tau(N) \cdot \overrightarrow{MN}$

Réciproquement : Si $\vec{\mathbf{V}}(M)$ est équiprojectif, il existe un vecteur $\vec{\mathfrak{R}}$ libre tel que :

$\forall M, N \in \varepsilon$, on a : $\vec{\mathbf{V}}(M) = \vec{\mathbf{V}}(N) + \overrightarrow{\mathbf{MN}} \wedge \vec{\mathfrak{R}}$

1.19. Torseurs représentés par le système particulier des vecteurs liés

1.19.1. Vecteurs liés concourants en un point O

Soit le torseur $\boldsymbol{\tau}$ représenté par le système ci-contre (figure)

Ses éléments de réduction : $\{ \vec{\mathcal{R}} = \sum_{i=1} \vec{\mathbf{V}}_i \; , \; \vec{\mathcal{M}}(O) = \vec{0} \}$

$h = \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}(O) = 0$

Si $\vec{\mathcal{R}} = \vec{0}$ $\boldsymbol{\tau}$ est le torseur nul (car $\vec{\mathcal{M}}(O) = \vec{0}$)

Si $\vec{\mathcal{R}} \neq \vec{0}$ $\boldsymbol{\tau}$ est un glisseur d'axe // $\vec{\mathcal{R}}$ passant par O (h = 0 , $\vec{\mathcal{M}}(O) = \vec{0}$)

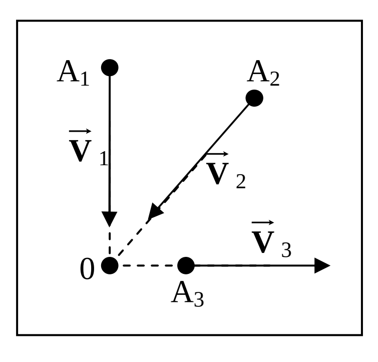


Fig.19

A chaque vecteur lié, on peut associer un glisseur.

Théorème

La somme de ***N*** glisseurs d'axes concourants en un point ***O***, de résultantes respectives $\vec{V}_i$ est :

- Un torseur nul, si $\vec{\mathfrak{R}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{V}_i = \vec{0}$
- un glisseur d'axe $\Delta // \vec{\mathfrak{R}}$ passant par O, si :

$$\vec{\mathfrak{R}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{V}_i \neq \vec{0} \ \boldsymbol{\tau}$$

1.19.2. Vecteurs liés parallèles entre eux

on considère un système de vecteurs liés $\vec{V}_i$ qui sont tous parallèles entre eux et au vecteur unitaire $\vec{u}$.

Posons : $\vec{V}_i = m_i . \vec{u}$ et $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$

En un point O, quelconque de l'espace affine ε, les éléments de réduction Sont :

$$\vec{\mathfrak{R}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{V}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{u} = m \vec{u}$$

$$\vec{\mathcal{M}}(O) = \sum_{i=1}^{N} (\overrightarrow{OA_i} \wedge m_i \vec{u}) = (\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OA_i}) \wedge \vec{u}$$

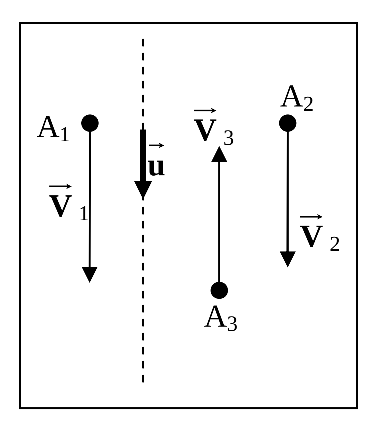


Fig.20

Discussion :

a) Si $\boldsymbol{m} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{m_i} = 0$; $\vec{\mathfrak{R}} = \vec{0}$. $\boldsymbol{\tau}$ est soit le torseur nul soit un couple ($\vec{\mathfrak{R}} = \vec{0}$; $\boldsymbol{h} = 0$)

b) Si $\boldsymbol{m} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{m_i} \neq 0$; $\vec{\mathfrak{R}} \neq \vec{0}$. $\boldsymbol{\tau}$ est un glisseur d'axe // $\vec{\mathfrak{R}}$.

Par quel point passe cet axe ?

Soit $\boldsymbol{O}$, un point dont lequel les éléments de réduction sont :

- $\vec{\mathfrak{R}} \neq \vec{0}$
- $\vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{O}) = \sum_{i=1}^{N} (\overrightarrow{OA_i} \wedge m_i \vec{u}) = (\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OA_i}) \wedge \vec{u}$

Soit $\boldsymbol{G}$ le barycentre des $\boldsymbol{A_i}$ affectés des masse $\boldsymbol{m_i}$. : $\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OA_i}$.

Les éléments de réduction en $\boldsymbol{O}$ de $\boldsymbol{\tau}$ sont :

- $\vec{\mathfrak{R}} = m\vec{u}$
- $\vec{\mathcal{M}}(O) = m.\overrightarrow{OG} \wedge \vec{u}$

On en déduit : $\vec{\mathcal{M}}(G) = \vec{\mathcal{M}}(O) + \mathbf{GO} \wedge m\vec{u} = \vec{0}$

Les éléments de réduction sont - $\vec{\mathfrak{R}} \neq \vec{0}$ et $\vec{\mathcal{M}}(G) = \vec{0}$

C'est un glisseur d'axe parallèle à $\vec{\mathfrak{R}}$ passant par $\boldsymbol{G}$.

Théorème

Une somme de glisseurs d'axes parallèles et de résultantes respectives $\vec{V}_i = m_i.\vec{u}$ est :

- Un torseur est nul ou formant un couple, si : $m = \sum_{i=1}^{N} m_i = 0$
- Un glisseur de résultante $\vec{\mathfrak{R}} = \sum_{i=1}^{N} m_i\ \vec{u} = m\vec{u}$ et d'axe parallèle à $\vec{\mathfrak{R}}$, passant par le barycentre $\boldsymbol{G}$ des point $\boldsymbol{A_i}$ affectés des masses $\boldsymbol{m_i}$.

Chapitre 1

RAPPELS MATHEMATIQUES

Dans tout le chapitre : A chaque espace affine ε*, de dimension trois, on associe l'espace vectoriel* ***E*** *de dimension trois.*

1.1. Introduction

La Mécanique est une science qui a pour objet l'étude des mouvements et des actions qui les provoquent.

Pour résoudre des problèmes issus de la mécanique, Le mécanicien cherche à appliquer les lois mécaniques, qui nécessitent l'introduction des concepts tels que forces, vitesses, accélérations, etc.

La question fondamentale, qui vient tout de suite à l'esprit, est la suivante : *Comment caractériser les grandeurs physiques telles que forces, vitesses, accélérations, etc.* ?

Le plus simple est de se tourner vers les mathématiques et de chercher s'il existe un être mathématique qui possède les propriétés caractéristiques de ces grandeurs physiques. En effet, cet être mathématique existe : c'est ce qu'on appelle vecteur.

L'ensemble dans lequel appartient ce vecteur est appelé espace vectoriel, noté ***E***, de dimension trois. Cet espace est associé à un ensemble de points appelé espace affine, noté **ε**, de dimension trois, il représente l'espace physique dans lequel se produisent les phénomènes étudiés par la mécanique classique.

1.2. Notion de vecteurs

Un vecteur $\vec{V}$ est un segment de droite (Δ) sur lequel on distingue une origine et une extrémité. Si $A \in \varepsilon$ est l'origine du segment et $B \in \varepsilon$ son extrémité, le vecteur $\vec{V}$ sera noté : $\overrightarrow{AB}$

Ainsi, pour définir le vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$, il faut préciser :

1. Son origine : C'est le point ***A***
2. Sa direction : Celle de son support (Δ), qui n'est autre que la droite passant par les points ***A*** et ***B***.
3. Son sens : De ***A*** vers ***B*** (En général on dessine une flèche, d'origine ***A*** et d'extrémité ***B***.
4. Son module : C'est la longueur ***AB***, noté $\| \vec{V} \| = \| \overrightarrow{AB} \|$

L'emplacement des points ***A*** et ***B*** dans l'espace n'a pas d'importance. Deux déplacements de deux points d'origines distincts peuvent correspondre au même vecteur. Toutefois, il faut tenir compte de la longueur entre les deux points, de la direction (Δ) et du sens.

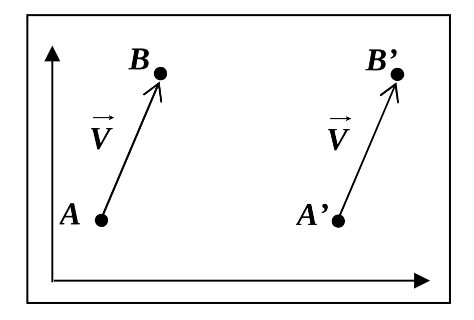


Fig. 1

Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont dits équipollents (égaux), car ils ont le même module, la même direction et le même sens.

1.2.1. Vecteur lié

On appelle vecteur lié, le couple (***M***, $\vec{V}$) constitué par un point ***M*** de **ε** et un vecteur $\vec{V}$ de ***E***

C'est un vecteur dont l'origine ***M*** *est* fixe, la direction et le sens sont connus. La position d'un tel vecteur est complètement définie sur la droite (**Δ**). Un tel vecteur est défini de manière unique, car son origine et son extrémité sont fixes sur la droite (**Δ**).

Ce vecteur est utilisé en mécanique pour représenter une force, une vitesse, une accélération, etc.

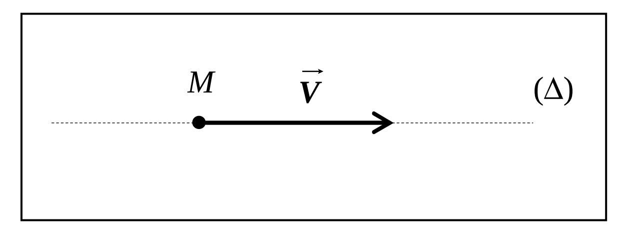


Fig.2

Généralement, nous aurons besoins dans nos calculs d'orienter la droite (Δ) par un vecteur unitaire $\vec{u}$ ($\|\vec{u}\| = 1$). Ainsi, le vecteur $\vec{V}$ peut être défini sur son support (Δ) orienté sous la forme :

$\vec{V} = V\vec{u}$ « où V est un réel »

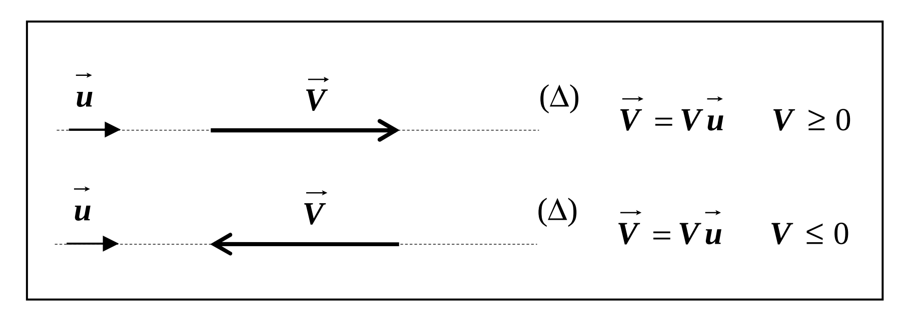


Fig.3

Deux vecteurs liés sont équipollents s'ils sont confondus (identiques)

1.2.2. Vecteur glissant (ou axial)

Un vecteur est dit glissant, si l'on impose son support (*Δ*). C'est un vecteur dont l'origine est un point quelconque de la droite (*Δ*), mais la direction, le sens et le module sont imposés.

Un tel vecteur peut glisser sur son support (*Δ*) pourvu que son module et son sens ne changent pas.

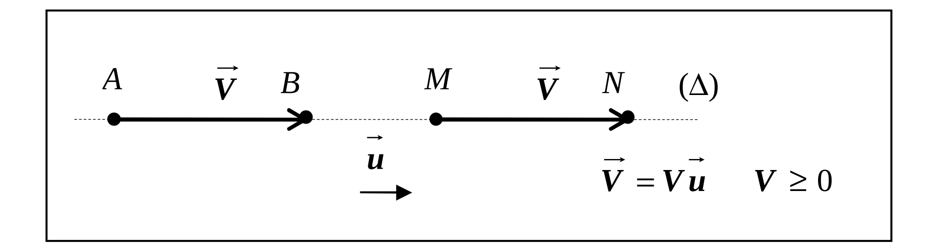


Fig.4

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont des représentations du même vecteur $\vec{V}$ glissant.

Ce vecteur peut être utilisé en mécanique pour représenter la vitesse de rotation autour d'un axe, etc.

1.2.3. Vecteur libre :

Un vecteur libre est un vecteur dont la direction, le sens et le module sont imposés par contre l'origine est le support sont quelconques. Un tel vecteur est défini à une translation arbitraire près.

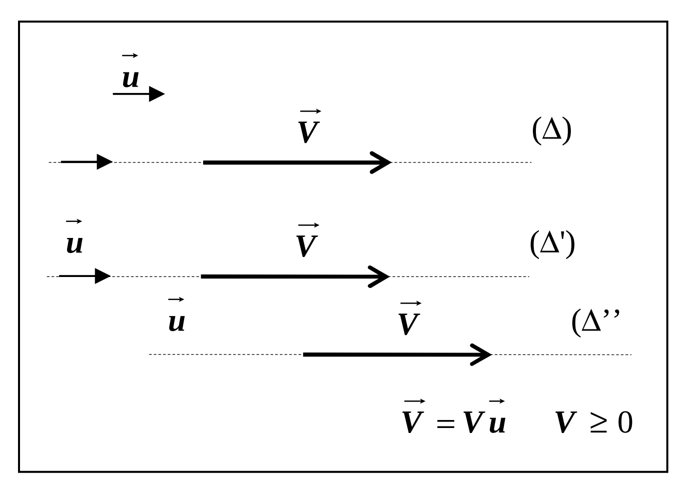


Fig.5

Ce vecteur est utilisé en mécanique pour représenter le champ de gravitation terrestre, etc.

1.3. Repère et coordonnées d'un vecteur

1.3.1. Base

Trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ non nuls et non coplanaires forment une base de l'espace ***E***.

1.3.2. Repère cartésien

Soit un point ***O*** de l'espace affine ε et une base de trois vecteurs ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), dans l'espace vectoriel ***E***, alors le quadruplet ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) forme un repère cartésien de ***E***.

Remarque :

> Soient quatre points non alignés ***O***, ***A***, ***B*** et ***C*** de l'espace affine ε, alors le quadruplet (O, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$) forme un repère cartésien de ***E***.

1.3.3. Coordonnées d'un vecteur

Soient une base de trois vecteurs ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) dans l'espace ***E*** et $\vec{V}$ un vecteur de ***E***, il existe un triplet unique de réels (***x***, ***y***, ***z***) tel que :

$$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

où :

$$\vec{V} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \qquad [1.1]$$

Avec : $\overrightarrow{AB} = x\vec{i}$; $\overrightarrow{BC} = y\vec{j}$; $\overrightarrow{CD} = z\vec{k}$

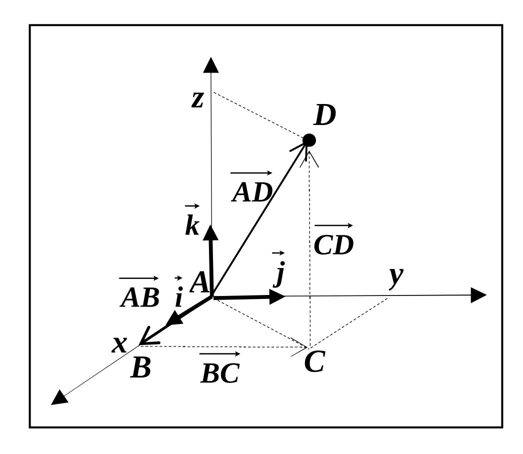


Fig.6

x, ***y*** et ***z*** sont les coordonnées (composantes) du vecteur $\vec{V}$ dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont les projections de $\overrightarrow{AD}$ suivant les directions respectives de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

1.4. Produit scalaire

1.4.1. Définition

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, que l'on note $\vec{U}.\vec{V}$, la quantité scalaire définie par :

$$\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\| cos\theta \qquad [1.2]$$

En considérant la figure ci-dessus, avec : $\vec{U} = \overrightarrow{OA}$; $\vec{V} = \overrightarrow{OB}$ et $(\vec{U},\vec{V}) = \theta$

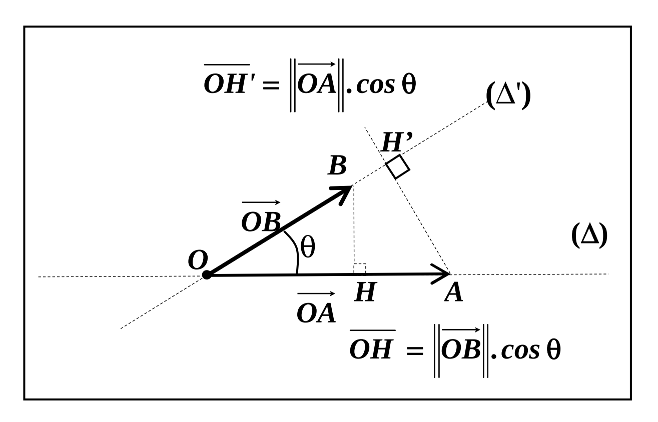


Fig.7

- Le point ***H*** (resp. ***H'***) est la projection du point ***B*** (resp. ***A***) sur l'axe Δ (resp. **Δ'**), support du vecteur $\vec{U} = \overrightarrow{OA}$ (resp. $\vec{V} = \overrightarrow{OB}$),
- La distance $\overline{OH}$ est prise sous forme algébrique et peut être positive ou négative suivant la valeur de l'angle **θ**.
- Le vecteur $\overrightarrow{OH}$ représente la projection du vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{OB}$ sur l'axe **Δ**.

Propriétés :

- Le module (norme) d'un vecteur $\vec{U}$ est positif et égale à la racine carrée de son produit scalaire par lui-même :

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{\vec{U}.\vec{U}}$$

- Le module d'un vecteur, égal à la somme de deux vecteurs, est égal à la racine carrée de la somme des produits scalaires

de chacun des vecteurs par lui même plus le double du produit scalaire de ces deux vecteurs.

En effet, en écrivant : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, on déduit :

$$\overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} \qquad [1.3]$$

Ce qui est équivalent à :

$$\overrightarrow{AC}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 + 2.\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{BC}\|.cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \qquad [1.4]$$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \theta$

1.4.2. Repère orthogonal / orthonormé

Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit orthogonal si les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux, c'est à dire :

$$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{i}.\vec{k} = 0 \qquad [1.5]$$

Le repère est orthonormé si en plus les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont unitaire, c'est à dire :

$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

1.4.3. Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé

Dans un espace $\boldsymbol{E}$ muni d'un repère orthonormé $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$, on considère deux vecteurs $\vec{\boldsymbol{U}}$ et $\vec{\boldsymbol{V}}$ (fig. 5.), tels que :

$$\vec{U} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \;;\; \vec{V} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} \qquad [1.6]$$

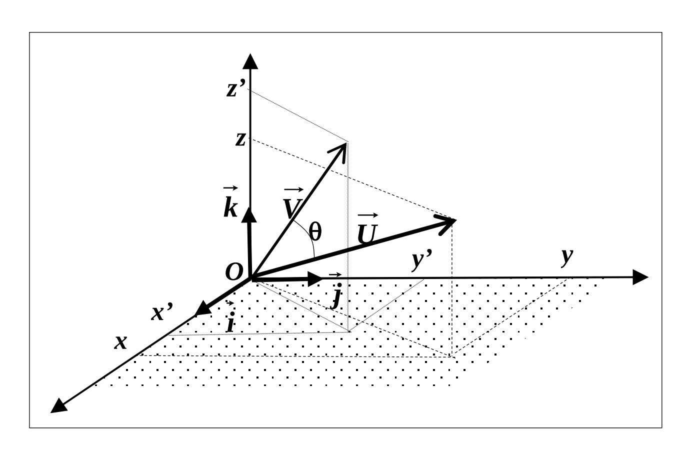


Fig.8

Le produit scalaire des vecteur $\vec{\boldsymbol{U}}$ et $\vec{\boldsymbol{V}}$ s'écrit sous la forme analytique :

$$\vec{U}.\vec{V} = xx' + yy' + zz' \qquad [1.7]$$

La norme du vecteur $\vec{\boldsymbol{U}}$:

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad [1.8]$$

La norme du vecteur $\vec{\boldsymbol{V}}$:

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \qquad [1.9]$$

Si $\vec{U} \neq \vec{0}$ et $\vec{V} \neq \vec{0}$, la valeur de l'angle $\theta = (\vec{U}, \vec{V})$ est telle que :

$$\cos\theta = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \quad [1.10]$$

1.5. Produit vectoriel

1.5.1. Définition

On appelle produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, que l'on note $\vec{U} \wedge \vec{V}$, le vecteur $\vec{W}$ dont la norme est égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et qui est orienté perpendiculairement au plan formé par $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de manière que $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ forme une base directe :

$$\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{W}\| = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.\sin\theta \quad [1.11]$$

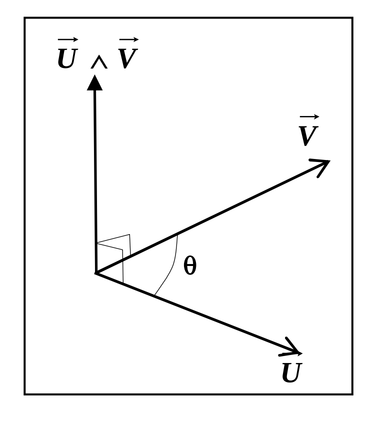


Fig.9

Remarquons que *:*

La base $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ est directe, c'est à dire qu'on a :

$(\vec{U}, \vec{V}) = \theta > 0$

$(\vec{V}, \vec{W}) = (\vec{W}, \vec{U}) = \dfrac{\pi}{2}$

Le produit vectoriel n'est pas commutatif :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U} \qquad [1.12]$$

Enfin, pour tout vecteur $\vec{A}$ non nul, le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition :

$$\vec{A} \wedge (\vec{U} + \vec{V}) = \vec{A} \wedge \vec{U} + \vec{A} \wedge \vec{V} \qquad [1.13]$$

1.5.2. Expression analytique du produit vectoriel dans un repère orthonormé

En considérant un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé, on voit tout de suite que :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \;;\; \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \text{ et } \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \qquad [1.14.a]$$

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0} \;;\; \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0} \text{ et } \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \qquad [1.14.b]$$

On considère deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, tels que :

$$\vec{U} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ et } \vec{V} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

Le calcul de l'expression analytique du produit vectoriel $\vec{U} \wedge \vec{V}$ se fait en utilisant le déterminant de la matrice d'ordre 3x3 « ci-dessous », dont la première ligne est formée par les vecteurs unitaires ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), la deuxième ligne formée par les composantes (***x*** , ***y*** , ***z***) du premier vecteur $\vec{U}$ et la troisième ligne formée par les composantes (***x'*** , ***y'*** , ***z'***) du second vecteur $\vec{V}$. Ainsi :

$$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix} \qquad [1.15.a]$$

$$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = (y.z' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k} \qquad [1.15.b]$$

On note dans cette expression la permutation circulaire sur les coordonnées des deux vecteurs, en passant d'une composante à l'autre du vecteur $\vec{W}$.

Remarque :

Nous pouvons retrouver l'expression analytique (ci-dessus) du produit vectoriel en utilisant l'écriture des vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ dans le repère ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) orthonormé sous la forme :

$$\vec{U} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \; ; \; \vec{V} = \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} \text{ et } \vec{W} = \begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{Bmatrix}$$

Ainsi :

$$\vec{W} = \begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{Bmatrix} = \vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix}$$

Par suite ; pour chaque composante du vecteur $\vec{W}$, nous masquons les composantes correspondantes des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et nous effectuons le produit croisé des quatre termes restants, en tenant comptes des signes + puis – dans nos calcul. Ceci se traduit de la façon suivante :

1ère composantes de $\vec{W}$: $x'' = (yz' - zy')$

Nous masquons les premières composantes de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et nous effectuons le produit en croix des composantes ***y***, ***z***, ***y'*** et ***z'*** restantes :

$$\begin{Bmatrix} x'' \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ y \\ z \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} \cdot \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} yz' - zy' \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}$$

2ème composantes de $\vec{W}$: $y'' = zx' - xz'$

Nous masquons les deuxièmes composantes de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et nous effectuons le produit en croix des composantes ***x***, ***z***, ***x'*** et ***z'*** restantes, en tenant compte du signe – « le signe – dans le premier produit puis le signe +.

$$\begin{Bmatrix} \cdot \\ y'' \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ \cdot \\ z \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} x' \\ \cdot \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ y'' \\ \cdot \end{Bmatrix}$$

3ème composantes de $\vec{W}$: $z'' = xy' - yx'$

Nous masquons les troisièmes composantes de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et nous effectuons le produit en croix des composantes ***x***, ***y***, ***x'*** et ***y'*** restantes.

$$\begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ z'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \cdot \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ z'' \end{Bmatrix}$$

1.5.3. Double produit vectoriel

Soient trois vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$:

Le double produit vectoriel de $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$, est un vecteur $\vec{W}$ vérifiant la relation :

$$\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 . \vec{V}_3)\vec{V}_2 - (\vec{V}_1 . \vec{V}_2)\vec{V}_3 \qquad [1.16]$$

En effet :

Soit : $\vec{U} = \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$

Le vecteur est nécessairement perpendiculaire à $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$.

Par suite, le vecteur $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{U}$ est perpendiculaire à $\vec{U}$.

On en déduit que $\vec{W}$ est dans le plan formé par $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$.

Donc, on peut écrire :

$\vec{W} = \alpha\vec{V}_2 + \beta\vec{V}_3$

où α et β sont à déterminer.

Sachant que $\vec{W}$ est perpendiculaire à $\vec{V}_1$, on déduit :

$\vec{V}_1.\vec{W} = 0 = \alpha\vec{V}_1.\vec{V}_2 + \beta\vec{V}_1.\vec{V}_3$

Soit : $\alpha\vec{V}_1.\vec{V}_2 = -\beta\vec{V}_1.\vec{V}_3$

Autrement : $\alpha = k\vec{V}_1.\vec{V}_3$ et $\beta = -k\vec{V}_1.\vec{V}_2$

Ce qui permet d'écrire, enfin :

$\vec{W} = k[(\vec{V}_1.\vec{V}_3)\,\vec{V}_2 - (\vec{V}_1.\vec{V}_2)\vec{V}_3]$

Pour montrer que $k = 1$, il suffit de développer le calcul en choisissant le cas particulier où $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$ et $\vec{V}_2$ perpendiculaire à $\vec{W}$ et en considérant que tous les vecteurs sont unitaires

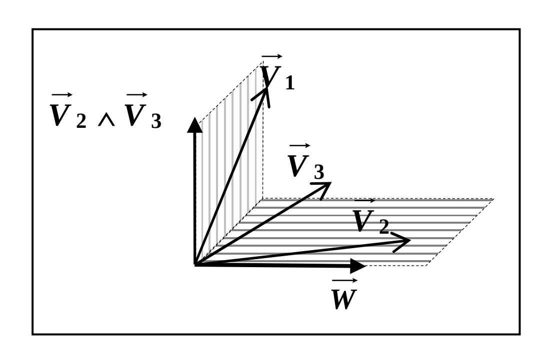


Fig.10

1.6. Produit mixte

1.6.1. Définition

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ la quantité scalaire, notée $(\vec{U},\vec{V},\vec{W})$, définie par :

$$(\vec{U},\vec{V},\vec{W}) = \vec{U}.(\vec{V} \wedge \vec{W}) \quad [1.17]$$

Pour retrouver la forme analytique du produit mixte en fonction des composantes des trois vecteurs $\vec{U} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{V} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ et $\vec{W} = x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}$, on développe le déterminant d'une matrice dont la première ligne comporte les composantes algébrique de $\vec{U}$, la second celle de $\vec{V}$ et la troisième celle de $\vec{W}$:

$$(\vec{U},\vec{V},\vec{W}) = \vec{U}.(\vec{V} \wedge \vec{W}) = det\begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} \quad [1.18]$$

Soit :

$$(\vec{U},\vec{V},\vec{W}) = x(y'z''-y''z') - y(x'z''-x''z') + z(x'y''-x''y') \quad [1.19]$$

Remarques :

- Dans une permutation circulaire des trois vecteurs, le produit mixte est invariant :

$$(\vec{U},\vec{V},\vec{W}) = (\vec{W},\vec{U},\vec{V}) = (\vec{V},\vec{W},\vec{U}) \quad [1.20]$$

- Une permutation de deux vecteurs change le signe du produit mixte, car le produit vectoriel n'est pas commutatif :

$$(\vec{U},\vec{V},\vec{W}) = -(\vec{V},\vec{U},\vec{W}) = -(\vec{U},\vec{W},\vec{V}) \qquad [1.21]$$

1.6.2 Signification géométrique du produit mixte

Le module du produit mixte, correspond au volume du parallélépipède déterminé par les trois vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$.

En effet, en partant de la définition du produit mixte :

$$(\vec{U},\vec{V},\vec{W}) = \vec{U}.(\vec{V} \wedge \vec{W}) = \vec{W}.(\vec{U} \wedge \vec{V})$$

D'une part, le module du produit vectoriel $(\vec{U} \wedge \vec{V})$ représente l'aire du parallélogramme (***ABCD***) construit par les vecteur $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

D'autre part, en posant $\vec{A} = (\vec{U} \wedge \vec{V})$, on aura :

$$\|(\vec{U},\vec{V},\vec{W})\| = \|\vec{A}\|.\|\vec{W}\|\cos(\vec{A},\vec{W})$$

La relation ci-dessus n'est autre que le volume du parallélépipède déterminé par les trois vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$.

La quantité $\|\vec{W}\|\cos(\vec{A},\vec{W})$ représente la projection de $\vec{W}$ sur le support du vecteur $\vec{A}$, ayant pour mesure $AH = h$.

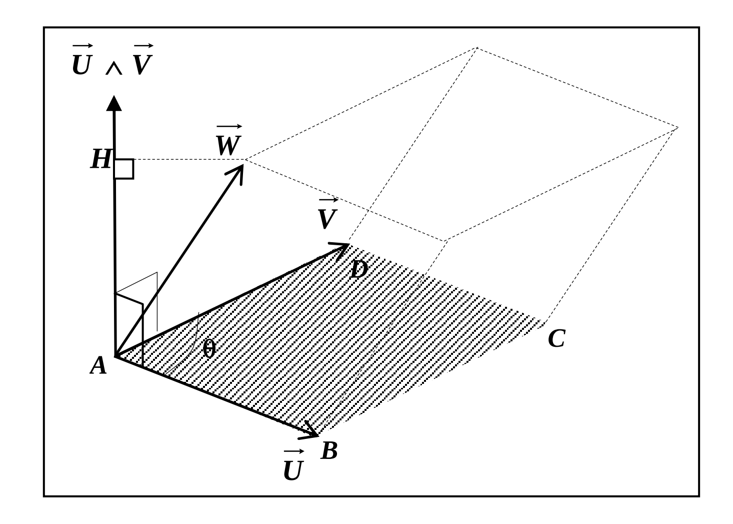


Fig.11

1.7. Division vectorielle

Etant donné deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, peut-on trouver un vecteur $\vec{X}$ tel que :

$$\vec{U} \wedge \vec{X} = \vec{V} \qquad [1.22]$$

En multipliant scalairement, par le vecteur $\vec{U}$, les deux membres de cette relation, nous aurons la relation :

$$\vec{U}.(\vec{U} \wedge \vec{X}) = \vec{U}.\vec{V} \qquad [1.23]$$

Il est évident que l'équation [1.22] n'admettra de solution que si : $\vec{U}.\vec{V} = 0$, car le produit scalaire $\vec{U}.(\vec{U} \wedge \vec{X})$, formant le premier membre de l'équation, est toujours nul.

Dans cette condition, deux cas se présentent :

i) Cas où $\vec{U}.\vec{V} = 0$ et $\vec{U} = \vec{0}$

Dans ce cas tout vecteur $\vec{X}$ est solution de l'équation [1.23], à condition que le vecteur $\vec{V} = 0$. En effet :

d'une part : si $\vec{U} = \vec{0}$, alors $(\vec{U} \wedge \vec{X}) = \vec{0}$, pour tout vecteur $\vec{X}$.

D'autre part l'équation [1.22] ne peut être vérifiée que : si $\vec{V} = 0$.

Dans le cas contraire cette équation n'admet pas de solution.

ii) Cas où $\vec{U}.\vec{V} = 0$ et $\vec{U} \neq \vec{0}$

Dans ce cas, nous supposons que l'équation [1.22] admet une solution particulière $\vec{X}_0$ tel que :

$$\vec{U} \wedge \vec{X}_0 = \vec{V} \qquad [1.24]$$

En soustrayant [1.24] de [1.22], nous aurons :

$$\vec{U} \wedge (\vec{X}_0 - \vec{X}) = 0$$

On déduit que : $\vec{X}_0 - \vec{X} = k\vec{U}$, k est un nombre réel.

Par suite, la solution générale de l'équation [1.22] est :

$$\vec{X}_0 = \vec{X} + k\vec{U} \text{ , k est un nombre réel} \qquad [1.25]$$

Par ailleurs, nous pouvons choisir la solution particulière de [1.22] sous la forme : $\vec{X}_0 = \vec{U} \wedge \vec{V}$

Ceci nous permet d'écrire :

$$\vec{U} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{V}) = \vec{V} \qquad [1.26]$$

En utilisant la relation [1.16] du double produit vectoriel, il vient :

$$\vec{U} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{V}) = \vec{V} = (\vec{U} . \vec{V})\vec{U} - (\vec{U} . \vec{U})\vec{V} = - \|\vec{U}\|^2 \vec{V} \qquad [1.27]$$

En écrivant la relation ci-dessus sous la forme :

$$\vec{U} \wedge \frac{\vec{U} \wedge \vec{V}}{\|\boldsymbol{V}\|^2} = -\vec{V} \qquad [1.28]$$

Et en comparant à [1.24], nous déduisons la solution particulière sous la forme :

$$\vec{X}_0 = -\frac{\vec{U} \wedge \vec{V}}{\|\boldsymbol{V}\|^2} \qquad [1.29]$$

Ainsi, la solution générale s'écrit :

$$\vec{X} = -\frac{\vec{U} \wedge \vec{V}}{\|V\|^2} + k\vec{V} \qquad [1.30]$$

1.8. Moment d'un vecteur lié

1.8.1. Moment par rapport à un point O

Considérons un vecteur lié (M, $\vec{V}$) et un point $O \in \varepsilon$.

On appelle moment en P du vecteur $\vec{V}$, le vecteur noté $\vec{\mathcal{M}}_s(O)$ tel que :

$$\vec{\mathcal{M}}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V} \qquad [1.31]$$

En ce référant à la figure 12 ci-dessous, on voit clairement que le module du moment par rapport à O a pour valeurs :

$$\|\vec{\mathcal{M}}(O)\| = OM.\|\vec{V}\| sin\theta = OH.sin\theta \qquad [1.32]$$

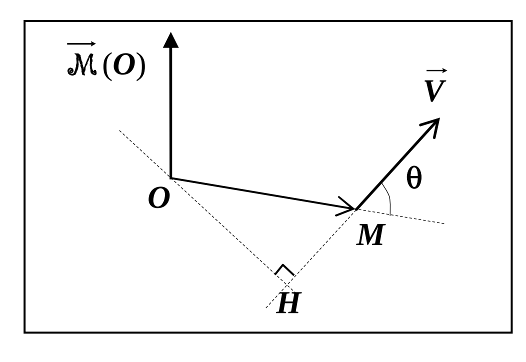


Fig.12

1.8.2. Moment par rapport à un axe (Δ)

Le moment du vecteur (M, $\vec{V}$) par rapport à l'axe (Δ) est la projection du moment d'un point O de la droite (Δ) sur elle-même.

En effet, en considérant la droite (Δ) orientée par un vecteur unitaire $\vec{u}$ ($\|\vec{u}\| = 1$), le moment de (M, $\vec{V}$) par rapport à l'axe (Δ) est défini par le produit scalaire :

$$\mathcal{M}_\Delta = \vec{u}.\vec{\mathcal{M}}(O) = \vec{u}.(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}) \qquad [1.33]$$

$\|\overrightarrow{OM}\|$ constitue la distant entre le prolongement de la droite portant le vecteur $\vec{V}$ et l'axe (Δ). Le moment par rapport à (Δ) ne dépend pas du point choisi sur l'axe. En effet, en choisissant un autre point ***O'*** de (Δ), nous aurons :

$$\mathcal{M}_\Delta = \vec{u}.(\overrightarrow{O'M} \wedge \vec{V}) = \vec{u}.(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}) \wedge \vec{V}$$

$$= \vec{u}.(\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{V}) + \vec{u}.(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V})$$

$$= \vec{u}.(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V})$$

Car : $\vec{u}.(\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{V}) = \vec{0}$, du fait que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{O'O}$ sont colinéaires.

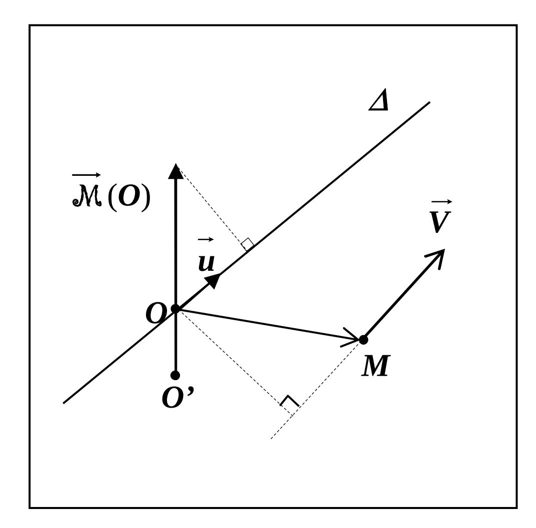


Fig.13

1.9. Résultante d'un système de N vecteurs liés

Souvent, nous avons besoin de raisonner sur un ensemble dénombrable de vecteurs $\vec{V}_i$ liés à des points M_i.

A titre d'exemple, imaginons, comme dans la figure 14 ci-dessous, un solide soumis à un ensemble de forces F_i,, chacune étant appliquée en un point donné M_i.

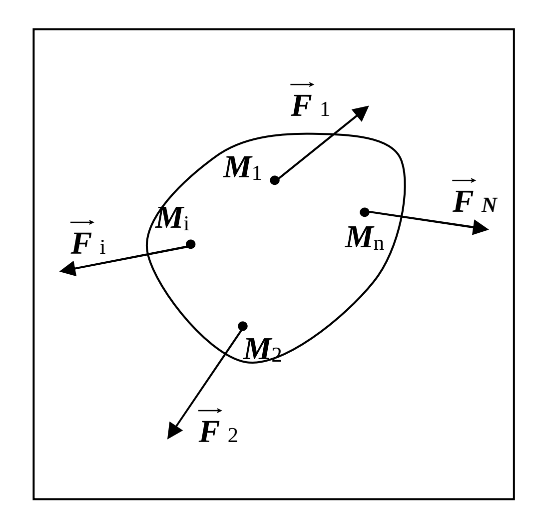


Fig.14

Le traitement du problème nécessitera le raisonnement sur un système (***S***) de ***N*** vecteurs liés.

Ainsi, on définit ce système comme un ensemble constitué de couples $(M_i\,,\ \vec{F}_i)$:

$(S) = \{(M_1\,,\ \vec{F}_1), (M_2\,,\ \vec{F}_2), \ldots, (M_i\,,\ \vec{F}_i), \ldots, (M_N\,,\ \vec{F}_N)\}$,

L'action de tous ces vecteurs est réduite à leur résultante qui est la sommation des effets de tous les vecteurs. Ainsi, Nous définissons

le premier élément de réduction de notre système (***S***) qui est la résultante noté :

$$\vec{\Re} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \qquad [1.34]$$

1.10. Champ de moments d'un système de N vecteurs liés

On appelle moment, en un point $P \in \mathcal{E}$, d'un système (S) de N vecteurs liés (M_i , $\vec{V}_i$), le vecteur noté $\vec{\mathcal{M}}_s(P)$ tel que :

$$\vec{\mathcal{M}}_s(P) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{PM_i} \wedge \vec{V}_i \qquad [1.35]$$

1.10.1. Propriété fondamentale du champ $\vec{\mathcal{M}}_s(P)$

En considérant deux point A et P différents et développant le calcul de $\vec{\mathcal{M}}_s(P)$, nous aurons :

$$\vec{\mathcal{M}}_s(P) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{PM_i} \wedge \vec{V}_i = \sum_{i=1}^{N} (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM_i}) \wedge \vec{V}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{PA} \wedge \vec{V}_i + \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{V}_i$$

$$= \overrightarrow{PA} \wedge \sum_{i=1}^{N} \vec{V}_i + \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{V}_i$$

$$= \overrightarrow{PA} \wedge \vec{\Re} + \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{V}_i$$

$= \overrightarrow{\boldsymbol{PA}} \wedge \vec{\Re} + \vec{\mathcal{M}}_s(\boldsymbol{P})$

On déduit, la propriété fondamentale qui stipule que :

Pour deux points ***P***, ***A*** quelconques de ε et la résultante $\vec{\Re}$ d'un système de ***N*** vecteurs liés, on a :

$$\vec{\Re} = \sum_{i=1}^{N} \vec{V}_i$$

$\vec{\mathcal{M}}_s(\boldsymbol{P}) = \overrightarrow{\mathbf{PA}} \wedge \vec{\Re} + \vec{\mathcal{M}}_s(\mathbf{A})$ Relation de transport

$\vec{\Re}$ et $\vec{\mathcal{M}}_s(\boldsymbol{P})$ constituent les éléments de réduction en ***P*** du système

1.10.2. Cas particulier d'un vecteur lié unique

En se donnant un système constitué d'un seul vecteur ($\boldsymbol{M}$, $\vec{\boldsymbol{V}}$), il est évident que le moment de ce système en un point ***P*** se réduit au moment du vecteur $\vec{\boldsymbol{V}}$ qui n'est autre que : $\vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{P}) = \overrightarrow{\boldsymbol{PM}} \wedge \vec{\boldsymbol{V}}$

Ce moment est toujours perpendiculaire au vecteur $\vec{\boldsymbol{V}}$ qui forme la résultante du système.

Par ailleurs, le moment $\vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{A})$ pour tout point ***A***, appartenant à la droite supportant le vecteur $\vec{\boldsymbol{V}}$, est nul.

1.11. Equivalence de deux systèmes de vecteurs liés (S) et (S')

Deux systèmes (***S***) et (***S'***) sont équivalents s'ils ont :

- même résultante : $\vec{\Re} = \vec{\Re}$
- même moment en un point ***P*** : $\vec{\mathcal{M}}_s(\boldsymbol{P}) = \vec{\mathcal{M}}_{s'}(\boldsymbol{P})$

Ceci constitué, bien entendu, une relation d'équivalence.

Une classe d'équivalence sur l'ensemble des vecteurs liés sera appelée un *torseur*.

Les torseurs sont des outils de modélisations analogues aux vecteurs, utilisés par les mécaniciens pour représenter les actions mécaniques spécifiques de plusieurs familles de vecteurs « vitesses, moments..). Leur domaine d'emploi privilégié concerne les études des mécanismes dans l'espace faisant intervenir des liaisons mécaniques complexes.

1.12. Torseur

1.12.1. Définition

On se donne un torseur τ, en un point ***M***, en se donnant :

- Un vecteur libre $\vec{\mathfrak{R}}$ « résultante »
- Un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{M}}_\tau(\boldsymbol{M})$ « Moment en ***M*** de τ »
- Satisfaisant : la relation de transport, quelques soient les points ***M***, ***P***$\in \varepsilon$:

$$\vec{\mathcal{M}}_\tau(\boldsymbol{P}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_\tau(\boldsymbol{M})} + \overrightarrow{\boldsymbol{PM}} \wedge \vec{\mathfrak{R}}$$

1.12.2. Eléments de réduction d'un torseur τ en un point

Pour connaître un torseur τ , à n'importe quel point ***M*** de ε, il suffit de connaître, en un point ***A***, le couple : ($\vec{\mathfrak{R}}$, $\vec{\mathcal{M}}_\tau(\boldsymbol{A})$). « la résultante et le champ de moment au point ***A*** ». Ainsi, en utilisant la relation de transport, on déduit le moment à chaque point ***M***$\in \varepsilon$:

$$\vec{\mathcal{M}}_\tau(\boldsymbol{M}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_\tau(\boldsymbol{A})} + \overrightarrow{\boldsymbol{MA}} \wedge \vec{\mathfrak{R}}$$

Le couple ($\vec{\Re}$, $\vec{\mathcal{M}}_\tau(\boldsymbol{A})$) forme les éléments de réduction du torseur τ au point $\boldsymbol{A}$.

Le couple ($\vec{\Re}$, $\vec{\mathcal{M}}_\tau(\boldsymbol{M})$) forme les éléments de réduction du torseur τ au point $\boldsymbol{M}$.

1.12.3. Egalité de deux torseurs

Deux torseurs τ et τ' sont égaux, s'ils ont la même résultante et le même champ de moments, au même point :

$$\vec{\Re} = \vec{\Re}'$$

$$\vec{\mathcal{M}}_\tau(\boldsymbol{M}) = \vec{\mathcal{M}}_{\tau'}(\boldsymbol{M})$$

Théorème 1

> Deux torseurs sont égaux s'ils ont le même champ de moments « l'égalité des résultantes n'est pas nécessaire »

Théorème 2

> Deux torseurs τ et τ' sont égaux si en un même point de ε, ils possèdent les mêmes éléments de réduction

1.13. Comoment de deux torseurs τ et τ'

1.13.1. Définition

On appelle comoment de deux torseurs τ et τ' le scalaire défini par :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{M}) = \vec{\mathcal{M}}_\tau(\boldsymbol{M}).\vec{\Re}' + \vec{\mathcal{M}}_{\tau'}(\boldsymbol{M}).\vec{\Re} \qquad [1.36]$$

1.13.2. Invariant scalaire d'un torseur τ

Soit un torseur τ donné, au point ***M***, par ses éléments de réduction $(\vec{\mathfrak{R}}\ ,\ \vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M}))$.

On appelle invariant scalaire du torseur τ la quantité scalaire :

$\boldsymbol{h} = \vec{\mathfrak{R}}\,.\,\vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M})$ « *indépendant du point* ***M*** » [1.37]

On obtient l'invariant scalaire du torseur τ en calculant le comoment de τ par lui-même, en un point où on connaît les éléments de réduction de τ.

1.13.3. Invariant vectoriel d'un torseur τ

Soit un torseur τ donné par ses éléments de réduction $(\vec{\mathfrak{R}}\ ,\ \vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M}))$ « $\vec{\mathfrak{R}}$ n'est pas nul »

On appelle invariant vectoriel du torseur τ la projection orthogonale de $\vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M})$ sur $\vec{\mathfrak{R}}$. « qui est un vecteur indépendant du point ***M*** ».

En effet, on peut décomposer le moment $\vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M})$ en deux composantes : l'une $\vec{\mathcal{M}}_N$ normale à $\vec{\mathfrak{R}}$ et l'autre $\vec{\mathcal{M}}_T$ parallèle à $\vec{\mathfrak{R}}$:

$\vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M}) = \vec{\mathcal{M}}_N + \vec{\mathcal{M}}_T$

En posant : $\vec{\mathcal{M}}_T = \lambda\vec{\mathfrak{R}}$,

et en tenant compte de : $\boldsymbol{h} = \vec{\mathcal{M}}_T\vec{\mathfrak{R}} = \lambda\vec{\mathfrak{R}}^{\,2}$

Avec : $\lambda = \dfrac{\boldsymbol{h}}{\vec{\mathfrak{R}}^{\,2}}$

On obtient :

$\vec{\mathcal{M}}_T = \dfrac{\mathbf{h}}{\vec{\mathfrak{R}}^2}\vec{\mathfrak{R}}$ « *Invariant vectoriel, indépendant de* ***M*** » [1.38]

Enfin, on peut écrire le moment au point ***M***, sous la forme :

$$\vec{\mathcal{M}}(M) = \vec{\mathcal{M}}_N + \vec{\mathcal{M}}_T = \vec{\mathcal{M}}_N + \frac{h}{\vec{\mathfrak{R}}^2}\vec{\mathfrak{R}} \quad [1.39]$$

Seule la partie normale $\vec{\mathcal{M}}_N$ dépend de ***M***.

1.14. Torseurs particuliers d'invariants scalaires nuls

Soit un torseur τ donné par ses éléments de réduction $(\vec{\mathfrak{R}}, \vec{\mathcal{M}}(M))$, de telle sorte que son invariant scalaire $h = \vec{\mathfrak{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}(M) = 0$

1.14.1. Torseur nul

Il est défini en un point ***A*** par : $(\vec{\mathfrak{R}} = \vec{0}\ ,\ \vec{\mathcal{M}}(A) = \vec{0})$

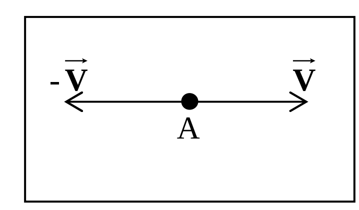


Fig.15

Par suite : $\forall\ M,\ \vec{\mathcal{M}}(M) = \vec{\mathcal{M}}(A) + \vec{MA} \wedge \vec{\mathfrak{R}} = \vec{0}$

1.14.2. Couple

Il est défini en un point ***A*** par : $(\vec{\mathfrak{R}} = \vec{0}\ ,\ \vec{\mathcal{M}}(A) = \vec{C} \neq \vec{0})$

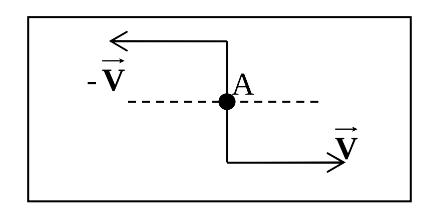


Fig.16

Ainsi : $\forall M \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{\mathcal{M}}(M) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) + \overrightarrow{\mathbf{MA}} \wedge \vec{\Re} = \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) = \vec{\mathbf{C}}$

1.14.3. Glisseur

C'est un torseur défini en un point ***A*** par : $\vec{\Re} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}(\boldsymbol{A})$ est tel que : $\vec{\Re} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) = 0$

On sait qu'il existe une infinité de vecteurs liés uniques, ayant pour éléments de réductions en un point ***A*** la résultante $\vec{\Re}$ et le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}(\boldsymbol{A})$. En se référant à la figure 17, cette affirmation devient évidente en liant le vecteur $\vec{\Re}$ à un point ***P*** appartenant à la droite parallèle à $\vec{\Re}$ et passant par $\boldsymbol{P_0}$, de telle sorte que :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AP_0}} = \frac{\vec{\Re} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}}(\boldsymbol{A})}{\vec{\Re}^2}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = \frac{\vec{\Re} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}}(\boldsymbol{A})}{\vec{\Re}^2} + \lambda \vec{\Re}$$

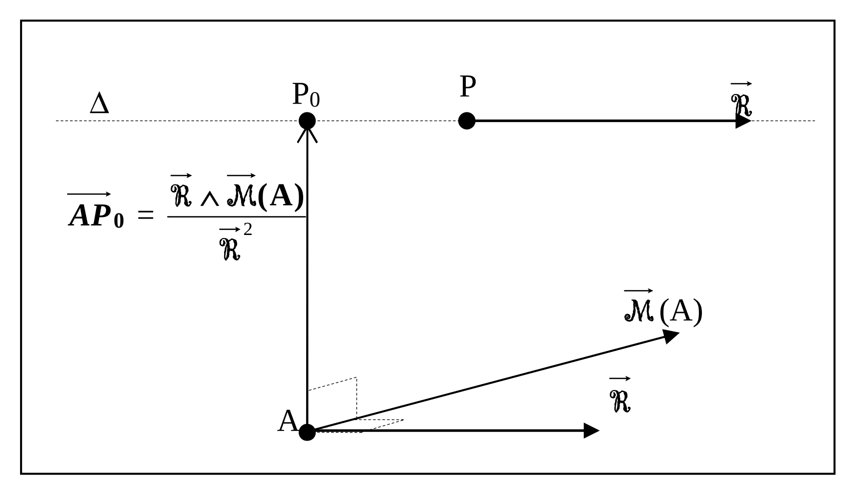


Fig.17

Remarque :

1. Pour tout point $M \in \Delta$, $\vec{\mathcal{M}}(M) = \vec{0}$
2. Si on avait défini le torseur en A par : $\vec{\mathfrak{R}} \neq \vec{0}$ et $\vec{\mathcal{M}}(A) = 0$, on peut toujours trouver un point B tel que :

   $\vec{\mathcal{M}}(B) = \vec{\mathcal{M}}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\mathfrak{R}} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\mathfrak{R}} \neq \vec{0}$ « à priori »
   ce qui permet de déduire : $\vec{\mathcal{M}}(B).\vec{\mathfrak{R}} = \vec{0}$

1.15. Axe central d'un torseur de résultante $\vec{\mathfrak{R}} \neq \vec{0}$

1.15.1. Définition

On appelle axe central d'un torseur τ de résultante $\vec{\mathfrak{R}} \neq \vec{0}$ le lieu des points M de ε tel que : $\vec{\mathcal{M}}(M)$ est parallèle à $\vec{\mathfrak{R}}$.

On démontre que ce lieu est une droite.

1.15.2. Démonstration analytique

Soit le torseur τ de résultante $\vec{\mathfrak{R}} \neq \vec{0}$, donné par ses éléments de réduction en un point M : ($\vec{\mathfrak{R}}$, $\vec{\mathcal{M}}(M)$). Dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ cartésien, le vecteur position et le moment en O s'écrivent :

$$\overrightarrow{OM} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3$$

$$\vec{\mathcal{M}}(O) = M_1 \cdot \vec{e}_1 + M_2 \cdot \vec{e}_2 + M_3 \cdot \vec{e}_3$$

$$\vec{\mathcal{M}}(M) = \vec{\mathcal{M}}(O) + \overrightarrow{MO} \wedge \vec{\mathfrak{R}} = \vec{\mathcal{M}}(O) + \vec{\mathfrak{R}} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\vec{\mathcal{M}}(M) = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1 + R_2 x_3 - R_3 x_2 \\ M_2 + R_3 x_1 - R_1 x_3 \\ M_3 + R_1 x_2 - R_2 x_1 \end{Bmatrix}$$

On cherche, les points M tels que : $\vec{\mathfrak{R}} \ // \ \vec{\mathcal{M}}(M)$

$$\frac{M_1 + R_2 x_3 - R_3 x_2}{R_1} = \frac{M_2 + R_3 x_1 - R_1 x_3}{R_2} = \frac{M_3 + R_1 x_2 - R_2 x_1}{R_3}$$

Ce sont les équations d'une droite, qui n'est autre que l'axe central de τ.

1.15.3. Propriétés d'axe central

a) $\forall M \in \Delta$, $\vec{\mathcal{M}}(M) = \frac{h}{\vec{\mathfrak{R}}^2} \vec{\mathfrak{R}}$. Le moment est constant le long de l'axe central.

En effet, on sait qu'en tout point de l'espace on a :

$$\vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M}) = \vec{\mathcal{M}}_N + \vec{\mathcal{M}}_T$$

Si $\boldsymbol{M} \in \Delta$ $\quad \vec{\mathcal{M}}_N = \vec{0}$

Et $\quad \vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M}) = \vec{\mathcal{M}}_T = \dfrac{\mathbf{h}}{\vec{\mathfrak{R}}^2}\vec{\mathfrak{R}}$

b) Le long de l'axe central, la norme $\|\vec{\mathcal{M}}(M)\|$ est minimale « cette propriété pourrait servir de définition de l'axe central ».

En un point ***M*** quelconque :

$$\|\vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M})\|^2 = \|\vec{\mathcal{M}}_N\|^2 + \|\vec{\mathcal{M}}_T\|^2$$

Si $\boldsymbol{M} \in \Delta$ $\quad \vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M}) = \vec{\mathcal{M}}_T = \dfrac{\mathbf{h}}{\vec{\mathfrak{R}}^2}\vec{\mathfrak{R}}$

$$\|\vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M})\|^2 = \|\vec{\mathcal{M}}_T\|^2 \text{ « minimal »}$$

c) L'axe central d'un glisseur est l'axe du glisseur lui même

En effet, sur l'axe d'un glisseur on a : $\vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M}) = \vec{0}$, ce qui explique que la norme du moment est minimale

d) L'axe central est parallèle à $\vec{\mathfrak{R}}$

Démonstration :

$$\forall \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in \mathcal{E}, \ \vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M}) = \vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{N}) + \overrightarrow{\boldsymbol{MN}} \wedge \vec{\mathfrak{R}}$$

Si $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in \Delta$, $\vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{M}) = \vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{N}) = \dfrac{\boldsymbol{h}}{\vec{\mathfrak{R}}^2}\vec{\mathfrak{R}}$

Soit : $\overrightarrow{\boldsymbol{MN}} \wedge \vec{\mathfrak{R}} = \vec{0} \quad \forall \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in \Delta$

1.16. Opérations sur les torseurs

1.16.1. Addition de deux torseurs

Soient deux torseurs τ_1 et τ_2 donnés par leurs éléments de réduction, en un même point $\boldsymbol{A} \in \varepsilon$:

$\tau_1(\vec{\mathcal{R}}_1\ ,\ \vec{\mathcal{M}}_{\tau_1}(\boldsymbol{A}))$; $\tau_2(\vec{\mathcal{R}}_2\ ,\ \vec{\mathcal{M}}_{\tau_2}(\boldsymbol{A}))$

La somme des deux torseurs τ_1 et τ_2 est un torseur τ noté :

$\tau = \tau_1 + \tau_2$, dont les éléments de réduction sont : $(\vec{\mathcal{R}}\ ,\ \vec{\mathcal{M}}_\tau)$.

Avec : $\vec{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{R}}_1 + \vec{\mathcal{R}}_2$

$$\vec{\mathcal{M}}_\tau(\boldsymbol{A}) = \vec{\mathcal{M}}_{\tau_1}(\boldsymbol{A}) + \vec{\mathcal{M}}_{\tau_2}(\boldsymbol{A})$$

1.16.2. Produit d'un torseur par un scalaire

Soit le torseur τ donné par ses éléments de réduction, en un même point $\boldsymbol{A} \in \varepsilon$: $\tau(\vec{\mathcal{R}}\ ,\ \vec{\mathcal{M}}_\tau(\boldsymbol{A}))$

On appelle produit de τ par un réel λ, le torseur noté $\lambda\tau$ dont les élément de réduction sont : $\lambda\tau\,(\lambda\vec{\mathcal{R}}\ ,\ \lambda\vec{\mathcal{M}}_\tau(A))$

Remarque :

L'ensemble des torseurs muni des opérations d'addition et de multiplication, forme un espace vectoriel.

1.17. Décomposition canonique d'un torseur en la somme d'un glisseur et d'un couple

Considérons un torseur τ de résultante $\vec{\mathfrak{R}} \neq \vec{0}$ dont on connaît son invariant scalaire et son axe central.

Théorème

Etant donné un torseur τ de résultante $\vec{\mathfrak{R}} \neq \vec{0}$.

- Si $h \neq 0$; le torseur τ se décompose en la somme d'un glisseur de résultante $\vec{\mathfrak{R}}$ d'axe central Δ et d'un couple de moment égal à $\dfrac{\mathbf{h}}{\vec{\mathfrak{R}}^2}\vec{\mathfrak{R}}$
- Si $h = 0$; le torseur τ est un glisseur noté : $\mathcal{G}(\Delta, \vec{\mathfrak{R}})$

Démonstration

Considérons l'axe central Δ d'un torseur τ et P un point de cet axe.

Les éléments de réduction de τ en P sont :

$$\tau \begin{Bmatrix} \vec{\mathfrak{R}} \\ \\ \dfrac{h}{\vec{\mathfrak{R}}^2}\vec{\mathfrak{R}} \end{Bmatrix}$$

On peut donc écrire :

$$\tau \text{ en } P \begin{Bmatrix} \vec{\mathfrak{R}} \\ \\ \dfrac{h}{\vec{\mathfrak{R}}^2}\vec{\mathfrak{R}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{\mathfrak{R}} \\ \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \\ \dfrac{h}{\vec{\mathfrak{R}}^2}\vec{\mathfrak{R}} \end{Bmatrix}$$

$$\tau \text{ en P =glisseur } \mathcal{G}(\Delta, \vec{\mathfrak{R}}) + \text{ Couple } \mathfrak{C}\left(\frac{\mathbf{h}}{\vec{\mathfrak{R}}^2}\vec{\mathfrak{R}}\right)$$

1.18. Champ vectoriel équiprojectif

1.18.1. Définition

Un champ de vecteur $\vec{\mathbf{V}}(M)$ est équiprojectif si,

$\forall M, N \in \varepsilon$, on a : $\vec{\mathbf{V}}(M).\overrightarrow{MN} = \vec{\mathbf{V}}(N).\overrightarrow{MN}$

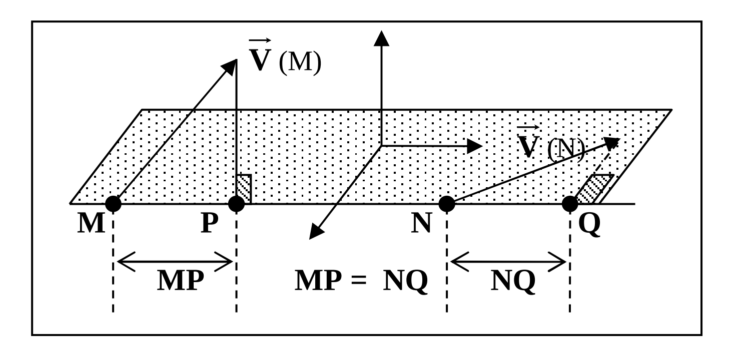


Fig.18

1.18.2. Application aux torseurs

Théorème

Le champ de moments d'un torseur est équiprojectif et, réciproquement, tout champ de vecteurs équiprojectif peut être considéré comme un torseur.

Démonstration

Soit un torseur τ de résultante $\vec{\mathfrak{R}}$ et de champ de moments $\vec{\mathcal{M}}_\tau(\boldsymbol{M})$

$\forall\, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in \varepsilon$, on a : $\vec{\mathcal{M}}_\tau(\boldsymbol{M}) = \vec{\mathcal{M}}_\tau(\boldsymbol{N}) + \overrightarrow{\boldsymbol{MN}} \wedge \vec{\mathfrak{R}}$

$$\vec{\mathcal{M}}_\tau(\boldsymbol{M}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{MN}} = \vec{\mathcal{M}}_\tau(N) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{MN}} + (\overrightarrow{\boldsymbol{MN}} \wedge \vec{\mathfrak{R}}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{MN}}$$

$$= \vec{\mathcal{M}}_\tau(N) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{MN}} + 0$$

Soit : $\vec{\mathcal{M}}_\tau(\boldsymbol{M}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{MN}} = \vec{\mathcal{M}}_\tau(N) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{MN}}$

Réciproquement : Si $\vec{\mathbf{V}}(M)$ est équiprojectif, il existe un vecteur $\vec{\mathfrak{R}}$ libre tel que :

$\forall\, M, N \in \varepsilon$, on a : $\vec{\mathbf{V}}(M) = \vec{\mathbf{V}}(N) + \overrightarrow{\mathbf{MN}} \wedge \vec{\mathfrak{R}}$

1.19. Torseurs représentés par le système particulier des vecteurs liés

1.19.1. Vecteurs liés concourants en un point O

Soit le torseur $\boldsymbol{\tau}$ représenté par le système ci-contre (figure)

Ses éléments de réduction : $\{ \vec{\mathcal{R}} = \sum_{i=1} \vec{\mathbf{V}}_i \ , \ \vec{\mathcal{M}}(O) = \vec{0} \}$

$h = \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}(O) = 0$

Si $\vec{\mathcal{R}} = \vec{0}$ $\boldsymbol{\tau}$ est le torseur nul (car $\vec{\mathcal{M}}(O) = \vec{0}$)

Si $\vec{\mathcal{R}} \neq \vec{0}$ $\boldsymbol{\tau}$ est un glisseur d'axe // $\vec{\mathcal{R}}$ passant par O ($h = 0$, $\vec{\mathcal{M}}(O) = \vec{0}$)

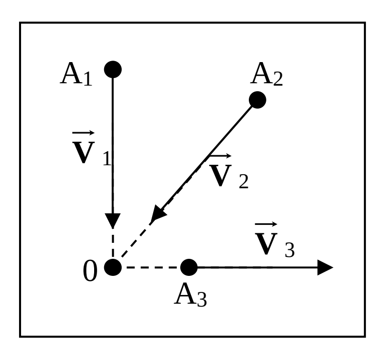


Fig.19

A chaque vecteur lié, on peut associer un glisseur.

Théorème

La somme de ***N*** glisseurs d'axes concourants en un point ***O***, de résultantes respectives $\vec{V}_i$ est :

- Un torseur nul, si $\vec{\Re} = \sum_{i=1}^{N} \vec{V}_i = \vec{0}$

- un glisseur d'axe $\Delta // \vec{\Re}$ passant par ***O***, si :

$$\vec{\Re} = \sum_{i=1}^{N} \vec{V}_i \neq \vec{0} \ \tau$$

1.19.2. Vecteurs liés parallèles entre eux

on considère un système de vecteurs liés $\vec{V}_i$ qui sont tous parallèles entre eux et au vecteur unitaire $\vec{u}$.

Posons : $\vec{V}_i = m_i . \vec{u}$ et $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$

En un point ***O***, quelconque de l'espace affine **ε**, les éléments de réduction Sont :

$$\vec{\Re} = \sum_{i=1}^{N} \vec{V}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{u} = m \vec{u}$$

$$\vec{\mathcal{M}}(O) = \sum_{i=1}^{N} (\overrightarrow{OA_i} \wedge m_i \vec{u}) = (\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OA_i}) \wedge \vec{u}$$

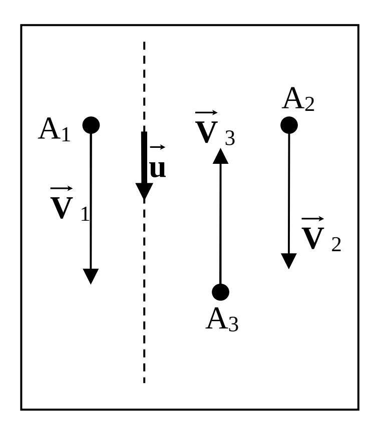


Fig.20

Discussion :

a) Si $\boldsymbol{m} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{m_i} = 0$; $\vec{\mathfrak{R}} = \vec{0}$. $\boldsymbol{\tau}$ est soit le torseur nul soit un couple ($\vec{\mathfrak{R}} = \vec{0}$; $\boldsymbol{h} = 0$)

b) Si $\boldsymbol{m} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{m_i} \neq 0$; $\vec{\mathfrak{R}} \neq \vec{0}$. $\boldsymbol{\tau}$ est un glisseur d'axe // $\vec{\mathfrak{R}}$.

Par quel point passe cet axe ?

Soit ***O***, un point dont lequel les éléments de réduction sont :

- $\vec{\mathfrak{R}} \neq \vec{0}$
- $\vec{\mathcal{M}}(\boldsymbol{O}) = \sum_{i=1}^{N} (\overrightarrow{OA_i} \wedge m_i \vec{u}) = (\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OA_i}) \wedge \vec{u}$

Soit G le barycentre des A_i affectés des masse m_i. : $\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OA_i}$.

Les éléments de réduction en O de τ sont :

- $\vec{\mathfrak{R}} = m\vec{u}$
- $\vec{\mathcal{M}}(O) = m.\overrightarrow{OG} \wedge \vec{u}$

On en déduit : $\vec{\mathcal{M}}(G) = \vec{\mathcal{M}}(O) + \overrightarrow{GO} \wedge m\vec{u} = \vec{0}$

Les éléments de réduction sont - $\vec{\mathfrak{R}} \neq \vec{0}$ et $\vec{\mathcal{M}}(G) = \vec{0}$

C'est un glisseur d'axe parallèle à $\vec{\mathfrak{R}}$ passant par G.

Théorème

Une somme de glisseurs d'axes parallèles et de résultantes respectives $\vec{V}_i = m_i.\vec{u}$ est :

- Un torseur est nul ou formant un couple, si : $m = \sum_{i=1}^{N} m_i = 0$
- Un glisseur de résultante $\vec{\mathfrak{R}} = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{u} = m\vec{u}$ et d'axe parallèle à $\vec{\mathfrak{R}}$, passant par le barycentre G des point A_i affectés des masses m_i.

Chapitre 2

CINEMATIQUE DU SOLIDE PARFAIT

Un solide parfait est un milieu indéformable. C'est un milieu pour lequel une distance entre deux points quelconques est constante dans le temps.

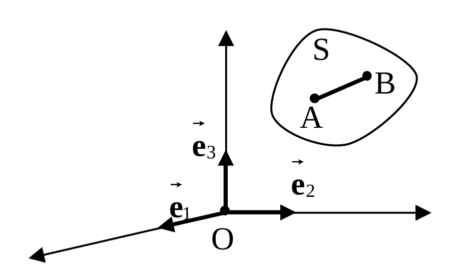
Un référentiel est constitué par le couple suivant :

- *Un solide parfait à partir duquel on repère les autres points de l'espace. On lui associe, en général, un repère orthonormé direct.*
- *Un moyen de mesure du temps.*

1. Torseur cinématique associé au mouvement d'un solide S vis-à-vis d'un référentiel R

On considère un référentiel **R**(**O**, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$) et un solide en mouvement par rapport à **R**.
Les coordonnées de l'un au moins de ses points ***M*** sont des fonctions du temps dans R.

Soient A et B deux points liés à S.
Si S est en mouvement par rapport à R, le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ dépend du temps, à priori. Mais la distance $\|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\|$ ne dépend pas de t, puisque le solide est indéformable.



1.1. Formule fondamentale de la cinématique du solide parfait

Sachant que $\|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\|$ ne dépend pas de t, on peut donc écrire :

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}(\overrightarrow{\mathbf{AB}}^2) = 2.\overrightarrow{\mathbf{AB}}.\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}(\overrightarrow{\mathbf{AB}}) = 2.\overrightarrow{\mathbf{AB}}.\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}(\overrightarrow{\mathbf{OB}} - \overrightarrow{\mathbf{OA}}) = 0$$

Soit :

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}.\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}(\overrightarrow{\mathbf{OB}}) = \overrightarrow{\mathbf{AB}}.\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}(\overrightarrow{\mathbf{OA}})$$

$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OB}) = \vec{V}_{S/R}(B)$ vitesse du point B de S vis-à-vis de R

On déduit :

$$\forall \text{ A et B liés à S on a : } \quad \overrightarrow{AB}.\vec{V}_{S/R}(B) = \overrightarrow{AB}.\vec{V}_{S/R}(A)$$

- Le champ des vitesses des points du solide S vis à vis de R est un champ de points équiprojectif.
- Le champ des vitesses de S par rapport à R peut être donc considéré comme le champ des moments d'un torseur, noté : $\mathcal{V}_{S/R}$ et qui représente le Torseur cinématique associé au mouvement de S/R.
- La résultante de ce torseur sera notée $\vec{\Omega}_{S/R}$ et on l'interprétera comme un taux de rotation.
- L'axe de rotation sera noté $\Delta_{S/R}$ et s'interprétera comme un axe instantané de rotation.

En un point M quelconque de S, le torseur cinématique $\mathcal{V}_{S/R}$ se déduira selon : $\begin{cases} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}_{S/R}(M) \end{cases}$

$$(\vec{\Omega}_{S/R} , \vec{V}_{S/R}(M))$$

Remarque : $\vec{\Omega}_{S/R}$ et $\vec{V}_{S/R}(M)$ Dépendent du temps, à priori.

On dispose, ainsi de la relation du transport :

$$\forall A, B \in S \quad \vec{V}_{S/R}(A,t) = \vec{V}_{S/R}(B,t) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}_{S/R}$$

Formule fondamentale de la cinématique du solide parfait

On peut écrire :

$$\vec{V}_{S/R}(B,t) - \vec{V}_{S/R}(A,t) = \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OB}) - \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OA}) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{AB}) = \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\forall A, B \in S \quad \frac{d}{dt}(\overrightarrow{AB}) = \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AB}$$

soit :

$$\forall \vec{X} \text{ lié à S } \frac{d}{dt}\vec{X} = \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{X}$$

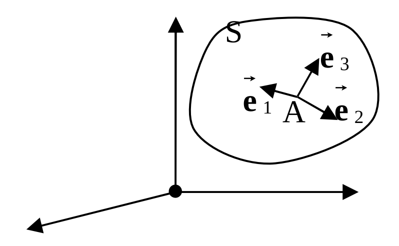
1.2. Une méthode de détermination de $\vec{\Omega}_{S/R}$

Soit une base orthonormée $(\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3)$ et un vecteur $\vec{X} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3$

Soit S un solide en mouvement /R. Pour étudier le mouvement de S/R, on lie à S un repère orthonormé direct constitué d'un point A de S et d'une base orthonormée de vecteurs $(\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3)$.

Vis-à-vis de R les vecteurs $\vec{e}_i$ sont à priori des fonctions de t. Comme ils sont liés à S, on a :

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\vec{\mathbf{e}}_i = \vec{\boldsymbol{\Omega}}_{S/R} \wedge \vec{\mathbf{e}}_i$$ « qui servira à déterminer $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{S/R}$ »



En effet :

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\vec{\mathbf{e}}_i \wedge \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\vec{\mathbf{e}}_i\right) = \sum_{i=1}^{3}\left(\vec{\mathbf{e}}_i \wedge (\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{S/R} \wedge \vec{\mathbf{e}}_i)\right) \text{ « } \vec{\mathbf{A}} \wedge (\vec{\mathbf{B}} \wedge \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{C}}) - \vec{\mathbf{C}}(\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{B}}) \text{ »}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\vec{\mathbf{e}}_i \wedge \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\vec{\mathbf{e}}_i\right) = \sum_{i=1}^{3}\left(\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{S/R}(\vec{\mathbf{e}}_i\,\vec{\mathbf{e}}_i) - \vec{\mathbf{e}}_i(\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{S/R}\,\vec{\mathbf{e}}_i\right) = 3\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{S/R} - \vec{\boldsymbol{\Omega}}_{S/R} = 2\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{S/R}$$

Par suite, dans la base orthonormée ($\vec{\mathbf{e}}_i$), quelconque lié à S, la résultante cinématique d'un solide en mouvement par rapport à un référentiel R, peut se déduire :

$$\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{S/R} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\vec{\mathbf{e}}_i \wedge \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\vec{\mathbf{e}}_i\right)$$

2. Etude de certains mouvements particuliers

C'est à travers ces mouvements particuliers que l'on interprétera la résultante et l'axe central du torseur cinématique $\mathcal{V}_{S/R}$.

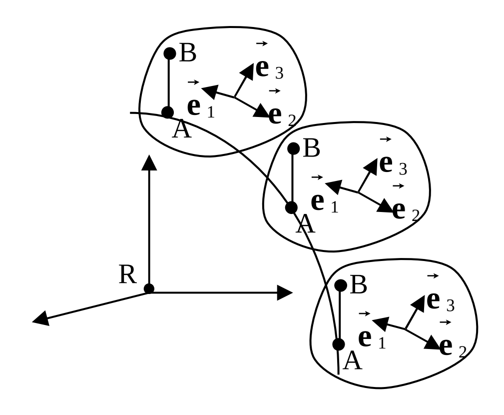
2.1. Mouvement de translation de S/R

Définition

Le solide S est en translation / R si : $\forall$ les points A, B liés à S, le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ est constant /R.

Cela ne signifie pas que la trajectoire des points de S est rectiligne. Un point de S peut avoir un trajectoire quelconque.

Conséquence : Si $\vec{\mathbf{X}}$ est un vecteur lié à S $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\vec{\mathbf{X}} = \vec{0}$



Si { $\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$ } est une base orthonormée liée à S $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = \vec{0}$, i = 1, 2, 3

$$\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{S/R} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \wedge \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\right) = \vec{0}$$

Dans un mouvement de translation : $\forall$ t « temps » $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{S/R}(t) = \vec{0}$

Le champ du vecteur vitesse est tel que :

$$\forall \text{ M lié à S } \vec{\mathbf{V}}(M,t) = \vec{\mathbf{V}}(A,t) \quad \text{car} \quad \overrightarrow{\mathbf{MA}} \wedge \vec{\boldsymbol{\Omega}}_{S/R} = \vec{0}$$

A chaque instant le champ de vitesses est le même en tout point de S. Il peut, toutefois, varier d'un instant à l'autre.

Le torseur cinématique $\mathcal{V}_{S/R}$. d'un mouvement de translation est un torseur d'invariant scalaire et de résultante nulle. C'est un couple : $\mathcal{V}_{S/R} = \mathscr{C}(\vec{\mathbf{V}}_{S/R}(A,t))$

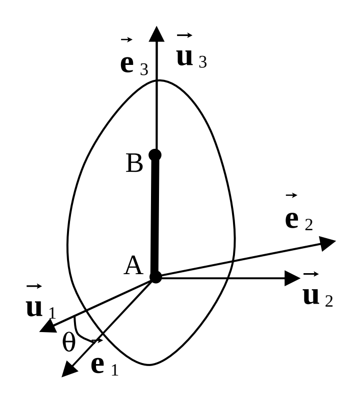
2.2. Mouvement de rotation autour d'un axe fixe par rapport à R

Définition

Le solide S est en rotation autour d'un axe fixe par rapport R s'il est en mouvement /R et si deux points A, B liés à S, sont fixes vis à dis de R.

La droite (AB) est fixe par rapport à R et S ne peut que tourner autour de AB.

A et (AB) étant fixes par rapport à R, on prendra pour référentiel fixe R; repère d'origine A et dont l'un des vecteurs de base ($\vec{\mathbf{u}}_3$) est parallèle à (AB). R(A, $\vec{\mathbf{u}}_1$, $\vec{\mathbf{u}}_2$, $\vec{\mathbf{u}}_3$)



Pour repérer S vis-à-vis de R, on introduira un repère un repère, lié à S, d'origine A, dont l'un des vecteurs unitaire ($\vec{e}_3$) est porté par (AB).

Le repérage de la position de S/R se fait par l'angle $\theta(t) = (\vec{u}_1, \vec{e}_1(t))$, orienté dans le sens direct du plan $(A, \vec{u}_1, \vec{e}_1)$

- *Axe central $\Delta_{S/R}$ du torseur $\mathcal{V}_{S/R}$?*
  On sait que l'axe central d'un torseur est le lieu des points où la norme du moment est minimale.
  Ici : $\|\vec{V}_{S/R}(A)\| = \|\vec{V}_{S/R}(B)\| = 0$ car A et B sont fixe par rapport à R
  $\Delta_{S/R}$ est la droite (AB). C'est l'axe de rotation

- *Résultante $\vec{\Omega}_{S/R}$ du torseur $\mathcal{V}_{S/R}$?*

  On sait que :

$$\vec{\Omega}_{S/R} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\vec{e}_i \wedge \frac{d}{dt}\vec{e}_i\right) = \frac{1}{2}\left[\vec{e}_1 \wedge \frac{d}{dt}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \wedge \frac{d}{dt}\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \wedge \frac{d}{dt}\vec{e}_3\right.$$

$$\vec{e}_3 \wedge \frac{d}{dt}\vec{e}_3 = \vec{0}$$

$$\vec{e}_1 = \cos\theta\,\vec{u}_1 + \sin\theta\,\vec{u}_2$$

$$\vec{e}_2 = -\sin\theta\,\vec{u}_1 + \cos\theta\,\vec{u}_2$$

$$\frac{d}{dt}\vec{e}_1 = \dot{\theta}\,\vec{e}_2 \quad \frac{d}{dt}\vec{e}_2 = -\dot{\theta}\,\vec{e}_1$$

$$\vec{\Omega}_{S/R} = \frac{1}{2}\left[\vec{e}_1 \wedge \frac{d}{dt}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \wedge \frac{d}{dt}\vec{e}_2\right] = \vec{\Omega}_{S/R} = = \frac{1}{2}\left[\vec{e}_1 \wedge \dot{\theta}\,\vec{e}_2 - \vec{e}_2 \wedge \dot{\theta}\,\vec{e}_1\right] = \dot{\theta}\,\vec{e}_3$$

- *Nature du torseur $\mathcal{V}_{S/R}$?*
  Eléments de réduction de en $\mathcal{V}_{S/R}$ A

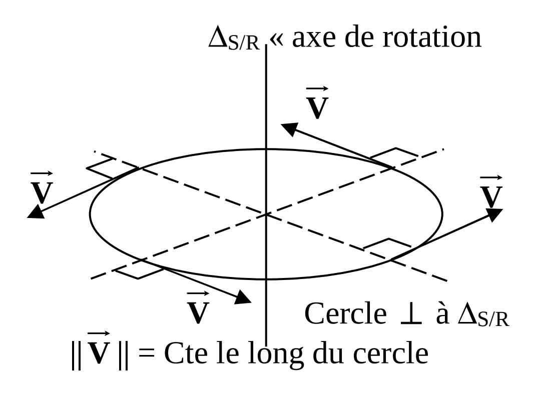
$$\vec{\Omega}_{S/R} = \dot{\theta}\,\vec{e}_3$$

$$\vec{V}_{S/R}(A) = \vec{0}$$

$$h_{S/R} = \vec{\Omega}_{S/R}.\ \vec{V}_{S/R}(t) = 0$$

$\mathcal{V}_{S/R}$ est d'invariant scalaire nul est de résultante $\vec{\Omega}_{S/R} \neq \vec{0}$

$\mathcal{V}_{S/R}$ est un glisseur de résultante $\vec{\Omega}_{S/R} = \dot{\theta}\,\vec{e}_3$



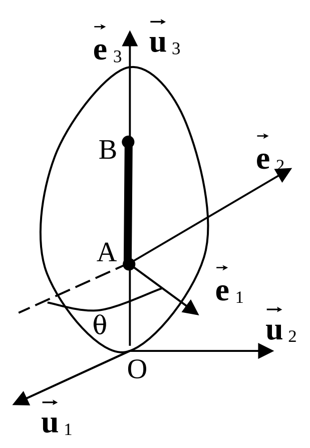
2.3. Mouvement de translation – rotation / R

Définition

S est en translation-rotation /R, si 2 points A et B, liés à S glissant le long d'une droite Δ liée à R et si S tourne autour de Δ.

Pour repérer S/R, il suffit de déterminer :

1. $\overrightarrow{\mathbf{OA}} = X_3.\vec{\mathbf{u}}_3$.
2. $\theta(t) = (\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{e}}_1(t))$. Orienté dans le sens direct



- *Résultante $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_{S/R}$ du torseur $\mathcal{V}_{S/R}$?*

  Le calcul est identique au précédent : $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_{S/R} = \dot{\theta}\,\vec{\mathbf{e}}_3$

- *Eléments de réduction de en A de $\mathcal{V}_{S/R}$*

  $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_{S/R} = \dot{\theta}\,\vec{\mathbf{e}}_3$

  $\vec{\mathbf{V}}_{S/R}(A) = \dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\overrightarrow{\mathbf{OA}} = \dot{\mathbf{X}}_3\vec{\mathbf{e}}_3$

  On éduit : $\forall$ M lié à S, $\vec{\mathbf{V}}(M) = \vec{\mathbf{V}}(A) + \overrightarrow{\mathbf{MA}} \wedge \dot{\theta}\,\vec{\mathbf{e}}_3$

- *Axe central de $\mathcal{V}_{S/R}$*

  L'axe central est parallèle à la résultante et est le lieu des points où le moment est // à la résultante :

  $\Delta_{S/R}$ est parallèle à $\vec{e}_3$ et passe par A, car $\vec{V}_{S/R} = \dot{X}\,\vec{e}_3$ // $\vec{\Omega}_{S/R} = \dot{\theta}\,\vec{e}_3$.

  $\Delta_{S/R}$ est l'axe de rotation au sens physique du terme.

- Invariant scalaire et vectoriel de $\mathcal{V}_{S/R}$:

  Invariant scalaire : $h_{S/R} = \vec{\Omega}_{S/R}.\,\vec{V}_{S/R}(A) = \dot{\theta}\,.\,\dot{X}_3$ « $\neq \vec{0}$ à priori »

  Invariant vectoriel est : $\dfrac{h_{S/R}\,.\vec{\Omega}_{S/R}}{\vec{\Omega}^2_{S/R}} = \dot{X}_3\,\vec{e}_3$

- Nature du torseur $\mathcal{V}_{S/R}$

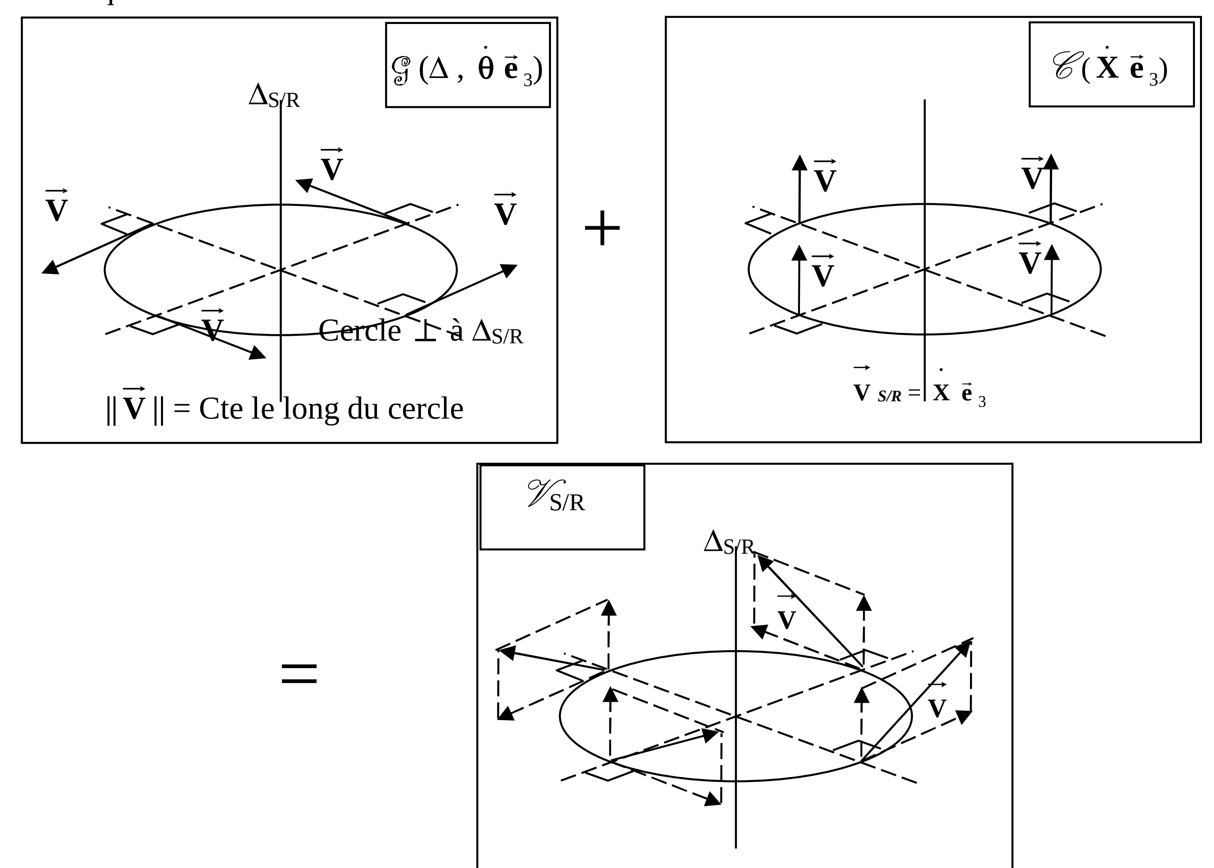
  L'invariant scalaire étant $\neq 0$, $\mathcal{V}_{S/R}$ est quelconque, on peut le décomposer en un glisseur et un couple, selon :

$$\mathcal{V}_{S/R} = \mathcal{G}(\Delta,\ \vec{\mathfrak{R}}) + \mathcal{C}\left(\frac{h}{\vec{\mathfrak{R}}^2}\vec{\mathfrak{R}}\right) = \mathcal{G}(\Delta,\ \vec{\Omega}_{S/R}) + \mathcal{C}\left(\frac{h_{S/R}\,.\vec{\Omega}_{S/R}}{\vec{\Omega}^2_{S/R}}\right)$$

$$= \mathcal{G}(\Delta,\ \dot{\theta}\,\vec{e}_3) + \mathcal{C}(\dot{X}\,\vec{e}_3)$$

Rotation d'axe Δ de taux $\vec{\Omega}_{S/R} = \dot{\theta}\,\vec{e}_3$; Translation de vitesse $\vec{V}_{S/R} = \dot{X}\,\vec{e}_3$

Remarque :



Cela montre que le champ du moment d'un torseur quelconque présente une symétrie de révolution autour de l'axe central.

<u>Cas particulier d'un mouvement hélicoïdal</u>

Précédemment, $\theta(t)$ et $X_3(t)$ étaient des paramètres indépendants.
Dans un mouvement hélicoïdal, $\theta(t)$ et $X_3(t)$ sont liées linéairement, c-à-d,

$\exists$ λ, μ et ν « réels » tels que : $\lambda X_3(t) + \mu\theta(t) = \nu$ (1)

Le ***<u>pas</u>*** « ***p*** » du mouvement hélicoïdal : c'est le déplacement de translation obtenu lorsque θ augmente de 2π :

$$\lambda(X_3(t)+\boldsymbol{p}) + \mu(\theta(t) + 2\pi) = \nu \qquad (2)$$

(1) – (2) $\lambda.\boldsymbol{p} + 2\pi.\,\mu = 0$

On déduit :

$$\boldsymbol{p} = -\frac{2\pi\mu}{\lambda}$$

En dérivant (1), on obtient : $\lambda.\dot{\mathbf{X}} + \mu.\dot{\theta} = 0$

Ce qui permet d'avoir : $\dfrac{\dot{\mathbf{X}}_3}{\dot{\theta}} = -\dfrac{\mu}{\lambda}$

Soit :

$$\boldsymbol{p} = 2\pi\frac{\dot{\mathbf{X}}_3}{\dot{\theta}}$$

3. Cas general de mouvement de S/R

3.1. Mouvements tangents à un instant donné t_0

Définition

Deux mouvements sont tangents à l'instant t_0, si leurs torseurs cinématiques respectifs sont égaux à l'instant t_0 (si leurs éléments de réductions en un point sont égaux à t_0)

3.2. Mouvement tangent t_0 au mouvement général

Soit un solide S en mouvement /R.

Soit $\mathcal{V}_{S/R}(t_0)$ son torseur cinématique à t_0.

Question : A quel mouvement est tangent le mouvement de S/R ?

Supposons à t_0 on connaît en un point lié à S les éléments de réduction de

$$\mathcal{V}_{S/R} \begin{cases} \vec{\Omega}_{S/R}(t_0) \\ \vec{V}_{S/R}(t_0) \end{cases}$$

On connaît : $h_{S/R}(t_0) = \vec{\Omega}_{S/R}(t_0).\vec{V}_{S/R}(A,t_0)$ et $\Delta(t_0)$, Lieu des points où $\vec{\Omega}_{S/R}(t_0) // \vec{V}_{S/R}$.

Discussion :

- Si $h_{S/R}(t_0) = 0$, deux cas possibles :

-a- $\vec{\Omega}_{S/R}(t_0) = \vec{0} \Rightarrow \mathcal{V}_{S/R}(t_0)$ est un couple. $\mathcal{V}_{S/R}(t_0) = \mathcal{C}_{S/R}(A , t_0)$

Nous dirons : à t_0, le mouvement de S/R est tangent à une translation. On peut prendre la translation rectiligne et uniforme de vitesse : $\vec{V}_0 = \vec{V}_{S/R}(A , t_0)$.

-b- $\vec{\Omega}_{S/R}(t_0) \neq \vec{0} \Rightarrow \mathcal{V}_{S/R}(t_0)$ est un glisseur. $\mathcal{V}_{S/R}(t_0) = \mathcal{G}_{S/R}(\Delta_{S/R}(t_0) , \vec{\Omega}_{S/R}(t_0))$.

Nous dirons : à t_0, le mouvement de S/R est tangent à une rotation, On peut prendre la rotation uniforme de taux : $\vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}_{S/R}(t_0)$ autour de l'axe fixe : $\Delta_{S/R}(t_0)$.

- Si $h_{S/R}(t_0) \neq 0$, $\mathcal{V}_{S/R}(t_0)$ est un torseur quelconque. On peut le décomposer en la somme d'un glisseur et d'un couple :

$\mathcal{V}_{S/R}(t_0)$ =	$\mathcal{G}(\Delta_{S/R}(t_0) , \vec{\Omega}_{S/R}(t_0))$	+	$\mathcal{C}\left(\dfrac{h_{S/R}.\vec{\Omega}_{S/R}}{\vec{\Omega}_{S/R}^2}\right)$
A t_0 le mouvement de S/R est tangent à un mouvement hélicoïdal	Rotation d'axe de taux $\vec{\Omega}_{S/R}(t_0)$, on peut prendre la rotation uniforme $\vec{\Omega}_0$ et d'axe $\Delta_0 = \Delta_{S/R}(t_0)$		Translation de vitesse $\vec{V}_T$, on peut prendre la translation uniforme de vitesse : $\vec{V}_0 = \dfrac{h_{S/R}.\vec{\Omega}_{S/R}}{\vec{\Omega}_{S/R}^2}$,

Question : Quel est le pas de ce mouvement tangent

On avait : si $\vec{\Omega}_{S/R} = \Omega_0 \vec{e}_3$ $\quad \vec{V}_{S/R} = V_0 \vec{e}_3$ $\quad \boldsymbol{p} = 2\pi \dfrac{V_0}{\Omega_0}$

Ici, $\vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}_{S/R}(t_0) = \|\vec{\Omega}_{S/R}(t_0)\| \dfrac{\vec{\Omega}_{S/R}}{\|\vec{\Omega}_{S/R}\|}$ $\quad$ - $\quad \vec{V}_0 = \dfrac{h_{S/R}.\vec{\Omega}_{S/R}}{\vec{\Omega}_{S/R}^2}$

$$\boldsymbol{p} = 2\pi \frac{\|\vec{V}_0\|}{\|\vec{\Omega}_0\|} = 2\pi.\boldsymbol{h}_{S/R}(t_0)./\vec{\Omega}^2_{S/R}(t_0)$$

Remarque fondamentale :

On démontre que le champ des accélérations des points de S par rapport à R n'est pas équiprojectif et ne satisfait pas à la relation de transport comme le champ des vitesses :

$$\vec{V}_{S/R}(B,t) = \vec{V}_{S/R}(A,t) + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AB}$$

A et B sont liés à S :

$$\frac{d}{dt}\vec{V}_{S/R}(B) = \frac{d}{dt}\vec{V}_{S/R}(A) + \frac{d}{dt}(\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AB})$$

Et :

$$\frac{d}{dt}(\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AB}) = [\frac{d}{dt}(\vec{\Omega}_{S/R})] \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \frac{d}{dt}\overrightarrow{AB})$$

$\overrightarrow{AB}$ étant lié à S, $\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB} = (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AB})$

Soit :

$$\vec{\Gamma}_{S/R}(B,t) = \vec{\Gamma}_{S/R}(A,t) + [\frac{d}{dt}(\vec{\Omega}_{S/R})] \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AB})$$

Chapitre 3

COMPOSITION DES MOUVEMENTS
CHANGEMENT DE REFERENTIEL

1. Généralité sur les dérivations en repère mobile

Quand on dit que le vecteur $\vec{\mathbf{X}}$ dépend du temps t, c'est nécessairement vis-à-vis d'un certain référentiel R.

Ainsi, en associant à R un repère (O, $\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$), $\vec{\mathbf{X}}$ dépend du temps par rapport à R.

Les composantes dans la base { $\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$ } sont des fonctions du temps, on peut alors écrire le vecteur $\vec{\mathbf{X}}$, sous la forme :

$$\vec{\mathbf{X}} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{3} x_\mathbf{i}(t).\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$$ « L'observation de l'évolution de $\vec{\mathbf{X}}$ s'effectue à partir de R »

De même, en considérant un deuxième référentiel R' et en lui associant un deuxième repère(O', $\vec{\mathbf{u}}_i$) mobile par rapport à R, le vecteur $\vec{\mathbf{X}}$ qui dépend du temps par rapport à R', s'écrit sous la forme associe à R'(O', $\vec{\mathbf{u}}_i$) :

$$\vec{\mathbf{X}} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{3} X_i(t).\,\vec{\mathbf{u}}_i$$ « L'observation de l'évolution de $\vec{\mathbf{X}}$ s'effectue à partir de R' »

Il faut bien comprendre que : Quand on dérive un vecteur $\vec{\mathbf{X}}$ par rapport au temps, on devra préciser vis-à-vis de quel référentiel, il dépend du temps.

On écrit : $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\vec{\mathbf{X}}\Big|_R$

Et on lit : Dérivée de $\vec{\mathbf{X}}$ par rapport au temps t, $\vec{\mathbf{X}}$ étant envisagé du point de vue du référentiel R.

Par définition, on aura :

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\vec{\mathbf{X}}\Big|_R = \sum_{\mathbf{i}=1}^{3} \dot{x}_\mathbf{i}(t).\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$$ « L'observateur est dans R »

Cette définition implique que l'observation de l'évolution du vecteur qui dépend du temps nous permet d'écrire sa dérivée par rapport au temps vis-à-vis de R', sous la forme :

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\vec{\mathbf{X}}\Big|_{R'} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{3} \dot{X}_\mathbf{i}(t).\vec{\mathbf{u}}_i$$ « L'observateur est dans R' »

Connaissant le mouvement de R' par rapport à R, comment sont reliées les dérivées $\frac{d}{dt}\vec{X}|_R$ et $\frac{d}{dt}\vec{X}|_{R'}$?

R' est en mouvement par rapport à R et $\vec{X}$ est écrit dans R', on aura :

$$\frac{d}{dt}\vec{X}|_R = \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{3} X_i(t).\vec{u}_i\right]|_R$$

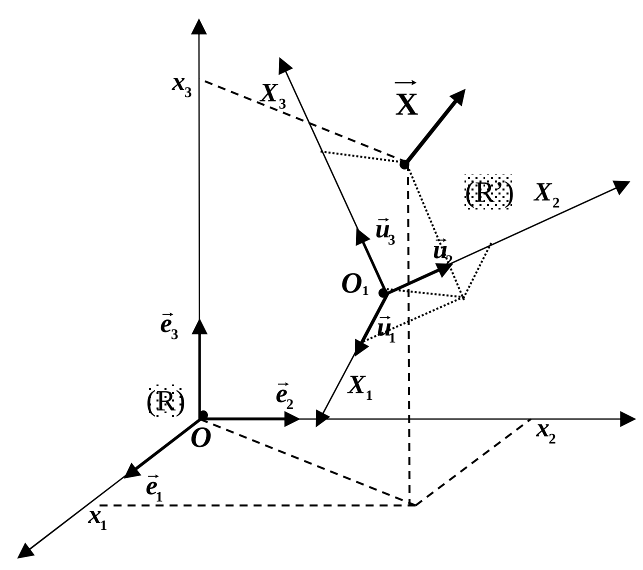
Or vis-à-vis de R, les vecteurs $\vec{u}_i$ dépendent du temps. Soit :

$$\frac{d}{dt}\vec{X}|_R = \sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dt}(X_i(t).\vec{u}_i)|_R$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \dot{X}\,\vec{u}_i + X_i(t)\,\frac{d}{dt}\vec{u}_i|_R$$

Les $\vec{u}_i$ sont liés à R', qui est lui-même en mouvement par rapport à R, avec un taux de rotation de R' par rapport à R $\vec{\Omega}_{R'/R}$ qui est représente la résultant cinématique du mouvement de R' par rapport à R.

$$\frac{d}{dt}\vec{u}_i|_R = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{u}_i$$



On obtient, donc :

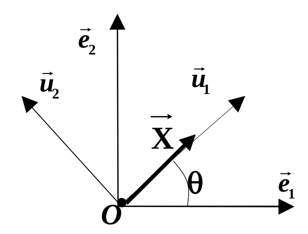
$$\frac{d}{dt}\vec{X}|_R = \frac{d}{dt}\vec{X}|_{R'} + \sum_{i=1}^{3} (X_i.(\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{u}_i)).$$

Utilité de cette formule.

Généralement, on connaît $\vec{X}$ et $\vec{\Omega}_{R'/R}$ par leurs composantes dans la base de R' :

- on en déduit, les composantes dans R' de $\frac{d}{dt}\vec{X}|_{R'}$,
- puis les composantes dans R' de $\frac{d}{dt}\vec{X}|_R$, sans avoir à projeter dans R pour calculer cette quantité.

Exemple :



$$\vec{X} = a.\vec{u}_1$$

$$\frac{d}{dt}\vec{X}\Big|_R = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{X} = a\,\dot{\theta}\,\vec{u}_2$$

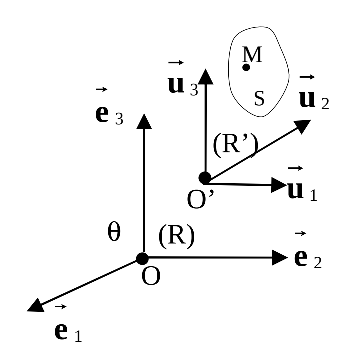
2. Composition des vitesses pour un solide parfait

Soit un solide S en mouvement par rapport à un référentiel R’ qui est lui-même en mouvement par rapport au référentiel R, supposé fixe. Cette configuration du problème suppose que l’observateur effectuent les mesure est attaché au référentiel R.

Nous nous proposons de déterminer les relations qui existe entre les grandeurs cinématiques mesurées par rapport à R’ et R.

Pour étudier le mouvement du solide S, on associe à chaque référentiel un repère pour déterminer les positions du solide. Ainsi, on note chaque référentiel avec le repère qui lui est attaché, comme suit :

- Le référentiel R(**O,** $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$). fixe « Absolu »
- Un référentiel mobile R’(**O’**, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$) en mouvement par rapport à R.



Quand on étudie le mouvement de S par rapport à R, on raisonne avec le vecteur $\overrightarrow{OM}$ « M∈ S). La vitesse du point M par rapport à R « M étant lié à S » s’écrit :

$$\vec{V}_{S/R}(M) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}\Big|_R$$

Quand on étudie le mouvement de S par rapport à R’, on raisonne avec le vecteur $\overrightarrow{O'M}$. La vitesse du point M par rapport à R’ « M étant lié à S », s’écrit :

$$\vec{V}_{S/R'}(M) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{O'M}\Big|_{R'}$$

2.1. Relation de composition des vitesses

Question : Comment sont liées $\vec{\mathbf{V}}_{S/R}(M)$ et $\vec{\mathbf{V}}_{S/R'}(M)$?

Réponse : Connaissant le mouvement de R' par rapport à R et en particulier $\vec{\Omega}_{R'/R}$, on a :

$$\vec{\mathbf{V}}_{S/R}(M) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}\Big|_R = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M})\Big|_R = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OO'}\Big|_R + \frac{d}{dt}\overrightarrow{O'M}\Big|_R$$

$$= \frac{d}{dt}\overrightarrow{OO'}\Big|_R + \frac{d}{dt}\overrightarrow{O'M}\Big|_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$= \vec{\mathbf{V}}_{S/R}(O') + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} + \frac{d}{dt}\overrightarrow{O'M}\Big|_{R'}$$

$$= \vec{\mathbf{V}}_{S/R}(O') + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\mathbf{V}}_{S/R'}(M)$$

On note : $\vec{\mathbf{V}}_{S/R}(O') + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{\mathbf{V}}_{R'/R}(M)$, avec M considéré comme lié à R'.

Soit : $$\vec{\mathbf{V}}_{S/R}(M) = \vec{\mathbf{V}}_{S/R'}(M) + \vec{\mathbf{V}}_{R'/R}(M)$$

2.2. Conséquence de la composition de vitesse

La relation $\vec{\mathbf{V}}_{S/R}(M) = \vec{\mathbf{V}}_{S/R'}(M) + \vec{\mathbf{V}}_{R'/R}(M)$ exprime que le champ des moments du torseur $\mathcal{V}_{S/R}$ qui est égal à la somme des champs des moments des torseurs $\mathcal{V}_{S/R'}$ et $\mathcal{V}_{R'/R}$, soit :

$$\mathcal{V}_{S/R} = \mathcal{V}_{S/R'} + \mathcal{V}_{R'/R}$$

On rappelle que : pour que les deux torseurs soient égaux, il faut et il suffit que l'égalité de leurs champs de moments soit vérifiée.

L'égalité des résultantes : $\vec{\Omega}_{S/R} = \vec{\Omega}_{S/R'} + \vec{\Omega}_{R'/R}$ n'est pas nécessaire à démontrer.

2.3. Mouvement inverse

Prenons le cas particulier de mouvements où le solide S est identifié au référentiel R « S = R ».

Dans ce cas nous supposons que les observations s'effectuent à partir du solide lui-même. Ainsi, nous pouvons facilement déduire :

$$\mathcal{V}_{R/R} = \mathcal{V}_{R/R'} + \mathcal{V}_{R'/R} = 0$$

On dit que le mouvement de R par rapport à R' est inverse du mouvement de R' par rapport à R. On a :

$$\begin{cases} \vec{\Omega}_{R/R'} = -\vec{\Omega}_{R'/R} \\ \vec{\mathbf{V}}_{R/R'} = -\vec{\mathbf{V}}_{R'/R} \end{cases}$$

3. Généralisation a N mouvements relatifs

Soient N référentiels R_1, R_2, .. R_i, .. R_N, en mouvement les uns/ aux autres.

Considérons : R_N, R_{N-1}, R_{N-2},

on a :

$$\mathcal{V}_{R_N/R_{N-2}} = \mathcal{V}_{R_N/R_{N-1}} + \mathcal{V}_{R_{N-1}/R_{N-2}}$$

$$\mathcal{V}_{R_N/R_{N-3}} = \mathcal{V}_{R_N/R_{N-1}} + \mathcal{V}_{R_{N-1}/R_{N-2}} + \mathcal{V}_{R_{N-2}/R_{N-3}} = \mathcal{V}_{R_N/R_{N-2}} + \mathcal{V}_{R_{N-2}/R_{N-3}}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\mathcal{V}_{R_N/R_1} = \sum_{i=2}^{N} \mathcal{V}_{R_i/R_{i-1}} =$$

$$\vec{\Omega}_{R_N/R_1} = \sum_{i=2}^{N} \vec{\Omega}_{R_i/R_{i-1}}$$

4. Composition des mouvements particuliers

4.1. Composition de N translations

On suppose que le mouvement de R_i, R_{i-1} est une translation quelque soit i :

$\mathcal{V}_{R_i/R_{i-1}}$ est un couple et $\vec{\Omega}_{R_i/R_{i-1}} = \vec{0}$

$$\mathcal{V}_{R_N/R_1} = \sum_{i=2}^{N} \mathcal{V}_{R_i/R_{i-1}}$$

$$\vec{\Omega}_{R_N/R_1} = \sum_{i=2}^{N} \vec{\Omega}_{R_i/R_{i-1}} = \vec{0}$$

Théorème :
- Une somme de couples est un couple
- Une somme de translation est une translation

4.2. Composition de N rotations

On suppose que le mouvement de R_i, R_{i-1} est une rotation quelque soit i :

$\mathcal{V}_{R_i/R_{i-1}}$ est un glisseur d'axe $\Delta_{R_i/R_{i-1}}$ et de résultante $\vec{\Omega}_{R_i/R_{i-1}}$.

$$\mathcal{V}_{R_N/R_1} = \mathcal{G}(\Delta_{R_i/R_{i-1}}, \vec{\Omega}_{R_i/R_{i-1}})$$

En particulier, son invariant scalaire est nul : $h_{R_i/R_{i-1}} = \vec{V}_{R_i/R_{i-1}}(M) \cdot \vec{\Omega}_{R_i/R_{i-1}}$

a. Cas général (***ATTENTION***)

Théorème :

- En général, la composition de N rotations n'est pas une rotation, mais un mouvement quelconque.
- Généralement, une somme de glisseurs quelconques n'est pas un glisseur.

Calcul de l'invariant scalaire de $\mathfrak{V}_{R_N/R_1}$.

$$h_{RN/R1} = \vec{V}_{R_N/R_1}(M).\vec{\Omega}_{R_N/R_1} = (\sum_{i=2}^{N} \vec{V}_{R_i/R_{i-1}}(M)).(\sum_{i=2}^{N} \vec{\Omega}_{R_i/R_{i-1}})$$

On sait seulement que $h_{Ri/Ri-1} = \vec{V}_{R_i/R_{i-1}}(M).\vec{\Omega}_{R_i/R_{i-1}} = 0$

Ce qui ne suffit pas pour annuler $h_{RN/R1}$ qui contient d'autres termes : $h_{RN/R1} \neq \vec{0}$ *à priori.*

Donc : $\mathfrak{V}_{R_N/R_1}$ n'est pas, à priori, un glisseur

b. Cas particulier important

Composition de rotation d'axes concourants en un point O.

Théorème :

- La composition de N rotations d'axes concourants en un point O est une rotation, d'axe passant par O.
- La somme de glisseurs d'axes concourants en un point O est un glisseur dont l'axe passe par le point concourant O.

5. Angles d'Euler

Ces angles sont utilisés comme des paramètres « fonction du temps » permettant de repérer un solide par rapport à un référentiel. Ils représentent 3 paramètres d'un total de 6 paramètres qui repèrent le solide dans l'espace.

5.1. Repérage d'un solide en mouvement autour d'un point O

Définition

- Un solide S est en mouvement, par rapport à R, autour d'un point fixe O, si O est un point fixe de S par rapport à R.

On prend O comme origine de R.

Question : Comment repérer à chaque instant la position de S vis-à-vis de R ?

Réponse : On va lier à S un repère orthonormé direct d'origine O, $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. Repérer S par rapport à R est équivalent à repérer la base $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) / (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

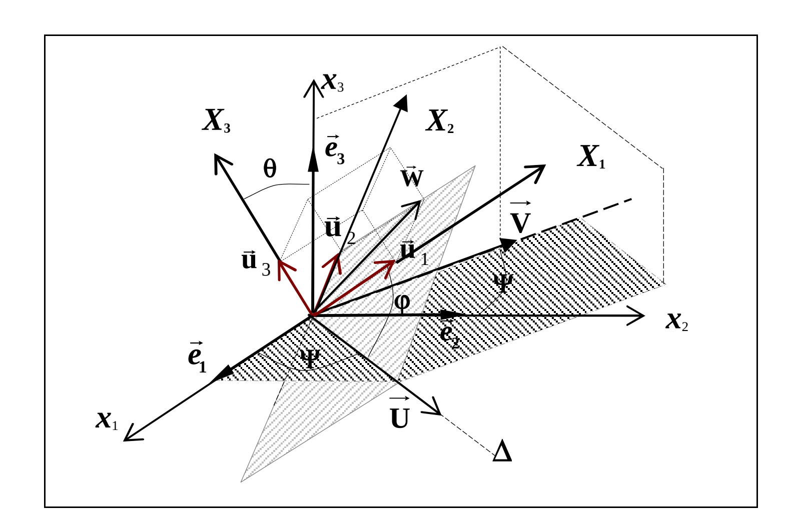
Cette démarche suppose que les deux repères sont confondus à l'état initial. Il est évident que le repère (O, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$) lié à S représente l'état final du solide dans l'espace et que le mouvement du solide sera décomposé en différents mouvement intermédiaire, qui seront présenté par des repères intermédiaires.

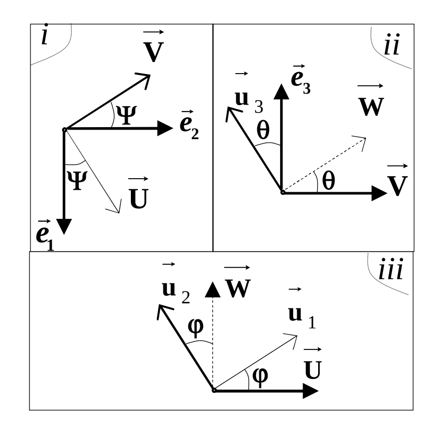
Question : Combien faut-il de paramètres pour déterminer une base orthonormée / à une autre base orthonormée ?

Réponse : On sait que pour repérer une base orthonormée vis-à-vis d'un autre, il suffit de 3 paramètres. En mécanique, on introduit les 3 *angles d'Euler*

Soit Δ intersection du plan (O,X_1,X_2) avec le plan (O,x_1,x_2) « (O,X_1,X_2) $\perp X_3$ et (O,$\boldsymbol{x}_1$,$\boldsymbol{x}_2$)$\perp \boldsymbol{x}_3$ »

- Ψ(t) = ($\vec{e}_1$, $\vec{U}$) orienté dans le sens direct de (O,$\boldsymbol{x}_1$,$\boldsymbol{x}_2$).
- φ(t) = ($\vec{U}$, $\vec{u}_1$) orienté dans le sens direct de (O,X_1, X_2).
- θ(t) = ($\vec{e}_3$, $\vec{u}_3$) orienté dans le sens direct de (O, X_1, X_3).





Synthèse :

Pour situer les angles de rotations ψ, φ, θ, qui nous permettent de passer de (**O,** $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$) à (O, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$), nous serons amenés à introduire les repères intermédiaires en utilisant les vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$. En effet :

- Dans la figure « *i* » situé dans le plan défini par ($\vec{e}_1$,$\vec{e}_2$), perpendiculaire à $\vec{e}_3$, on complète par le vecteur $\vec{V}$. Ainsi, nous introduisons le repère (O, $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{e}_3$) qui est déduit de (**O,** $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$) par une rotation de ψ.
- Dans la figure « *ii* » situé dans le plan défini par ($\vec{V}$,$\vec{e}_3$), perpendiculaire à $\vec{U}$, on complète par le vecteur $\vec{W}$. Ainsi, nous introduisons le repère (O, $\vec{U}$, $\vec{W}$, $\vec{u}_3$) qui est déduit de (O, $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{e}_3$) par une rotation de θ autour de $\vec{U}$.

- Dans la figure « *iii* » situé dans le plan défini par $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ perpendiculaire à $\vec{u}_3$, on complète par le vecteur $\vec{u}_3$. Ainsi, nous introduisons le repère $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ qui est déduit de $(O, \vec{U}, \vec{W}, \vec{u}_3)$ par une rotation de φ.

$(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — Rotation d'un angle ψ Autour de l'axe de $\vec{e}_3$ → $(O, \vec{U}, \vec{V}, \vec{e}_3)$

$(O, \vec{U}, \vec{V}, \vec{e}_3)$ — Rotation d'un angle θ Autour de l'axe de $\vec{U}$ → $(O, \vec{U}, \vec{W}, \vec{u}_3)$

$(O, \vec{U}, \vec{W}, \vec{u}_3)$ — Rotation d'un angle φ Autour de l'axe de $\vec{u}_3$ → $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ « lié à S »

5.2. Détermination du vecteur rotation de S par rapport à R

Le mouvement de S par rapport à R peut être considéré comme la composition des mouvements entre les différents repères intermédiaires, où : $\vec{\Omega}_{S/R} = \vec{\Omega}_{(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)/(\vec{e}_i, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$

$$\vec{\Omega}_{(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)/(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} = \vec{\Omega}_{(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)/(\vec{U}, \vec{W}, \vec{u}_3)} + \vec{\Omega}_{(\vec{U}, \vec{W}, \vec{u}_3)/(\vec{U}, \vec{V}, \vec{e}_3)} + \vec{\Omega}_{(\vec{U}, \vec{V}, \vec{e}_3)/(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

Rotation d'un angle φ Autour de l'axe de $\vec{u}_3$ « $\dot{\varphi}\,\vec{u}_3$ »	Rotation d'un angle θ Autour de l'axe de $\vec{U}$ « $\dot{\theta}\,\vec{U}$ »	Rotation d'un angle θ Autour de l'axe $\vec{e}_3$ « $\dot{\psi}\,\vec{e}_3$ »

$$\vec{\Omega}_{S/R} = \dot{\varphi}\,\vec{u}_3 + \dot{\theta}\,\vec{U} + \dot{\psi}\,\vec{e}_3$$

Remarque :

- Les vecteurs $\vec{u}_3$, $\vec{U}$, $\vec{e}_3$ ne constituent pas une base orthonormé : il faudra projeter cette expression.

5.3. Projection de $\vec{\Omega}_{S/R}$ dans divers trièdres

On reprend l'expression de $\vec{\Omega}_{S/R}$ et on projette les divers vecteurs « $\vec{u}_3$, $\vec{U}$, $\vec{e}_3$ » dans le trièdre choisi,

a. Projection dans la base liée au solide

On projette $\vec{U}$ et $\vec{e}_3$ dans $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$:

$$\vec{U} = \cos\varphi.\vec{u}_1 - \sin\varphi.\vec{u}_2$$

$$\vec{e}_3 = \sin\theta.\vec{W} + \cos\theta.\vec{u}_3$$

$$\vec{W} = \sin\varphi.\vec{u}_1 + \cos\varphi.\vec{u}_2$$

Soit :

$$\vec{e}_3 = \sin\theta.(\sin\varphi.\vec{u}_1 + \cos\varphi.\vec{u}_2) + \cos\theta.\vec{u}_3$$

On déduit les composantes de $\vec{\Omega}_{S/R}$ dans ($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$)

$$\vec{\Omega}_{S/R} = \dot{\varphi}\,\vec{u}_3 + \dot{\theta}\,[\cos\varphi.\vec{u}_1 - \sin\varphi.\vec{u}_2] + \dot{\psi}\,[\sin\theta.(\sin\varphi.\vec{u}_1 + \cos\varphi.\vec{u}_2) + \cos\theta.\vec{u}_3]$$

$$= [\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta.\sin\varphi]\,\vec{u}_1 + [-\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\theta.\cos\varphi]\,\vec{u}_2 \;\; [\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta]\,\vec{u}_3$$

b. Projection dans la base intermédiaire ($\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{e}_3$)

On reprend l'expression de $\vec{\Omega}_{S/R}$ dans ($\vec{u}_3$, $\vec{U}$, $\vec{e}_3$) et on projette $\vec{u}_3$ dans la base ($\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{e}_3$).

$$\vec{u}_3 = -\sin\theta.\vec{V} + \cos\theta.\vec{e}_3$$

Par suite :

$$\vec{\Omega}_{S/R} = \dot{\varphi}\,[-\sin\theta.\vec{V} + \cos\theta]\,\vec{e}_3 + \dot{\theta}\,\vec{U} + \dot{\psi}\,\vec{e}_3$$

$$= \dot{\theta}\,\vec{U} - \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{V} + [\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta]\,\vec{e}_3$$

Remarque :

Les éléments de réduction en O du torseur cinématique $\mathcal{V}_{S/R}$ sont :

- $\vec{\Omega}_{S/R} = \dot{\varphi}\,\vec{u}_3 + \dot{\theta}\,\vec{U} + \dot{\psi}\,\vec{e}_3$
- $\vec{V}_{S/R}(O) = \vec{0}$

$h_{S/R}(t) = 0$ quelque soit t

A chaque instant le mouvement autour du point fixe O est une rotation d'axe passant par O (mais variable au cours du temps) « exemple : mouvement de la toupie »

6. Repérage d'un solide en mouvement quelconque par rapport à R

Soit le référentiel R, vis-à-vis duquel le solide S est en mouvement quelconque : Comment repérer S par rapport à R ?

1. On lie à S le repère orthonormé direct (A, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$) et on cherche à repérer la base ($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$) par rapport à la base supposée fixe ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$).

2. Le point A est repéré par ses 3 coordonnées x_1, x_2 et x_3 dans le repère fixe (O, $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$, $\vec{\mathbf{e}}_3$).

$\overrightarrow{\mathbf{OA}} = x_1\vec{\mathbf{e}}_1 + x_2\vec{\mathbf{e}}_2 + x_3\vec{\mathbf{e}}_3$

Pour repérer la base ($\vec{\mathbf{u}}_1$,$\vec{\mathbf{u}}_2$,$\vec{\mathbf{u}}_3$) par rapport à ($\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$, $\vec{\mathbf{e}}_3$), on introduit un repère intermédiaire R'(A, $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$, $\vec{\mathbf{e}}_3$) de direction fixe par rapport à R. On utilisera les 3 angles d'Euler ψ(t), θ(t) et φ(t).

Le repérage de S/R nécessite 6 paramètres, fonctions du temps, à savoir :

- Les 3 coordonnées du point A dans R.
- Les 3 angles d'Euler

Remarques :

- Le mouvement de S par rapport à R' est une rotation autour du point fixe A.
- Le mouvement de R' par rapport à R est une translation « $\overrightarrow{\mathbf{\Omega}}_{R'/R} = \vec{0}$; ∀ t »
- Le mouvement de S par rapport à R peut être considéré comme un mouvement composé de S par rapport à R' et de R' par rapport à R. On peut écrire :

$$\overrightarrow{\mathbf{\Omega}}_{S/R} = \overrightarrow{\mathbf{\Omega}}_{S/R'} + \overrightarrow{\mathbf{\Omega}}_{R'/R} \qquad \text{“}\overrightarrow{\mathbf{\Omega}}_{R'/R} = \vec{0}\text{ ; translation”}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{\Omega}}_{S/R} = \dot{\varphi}\,\vec{\mathbf{u}}_3 + \dot{\theta}\,\vec{\mathbf{U}} + \dot{\psi}\,\vec{\mathbf{e}}_3$$

- Les éléments de réduction du torseur cinématique $\mathcal{V}_{S/R}$ en A de sont :

$$\text{Résultante : } \overrightarrow{\mathbf{\Omega}}_{S/R} = \dot{\varphi}\,\vec{\mathbf{u}}_3 + \dot{\theta}\,\vec{\mathbf{U}} + \dot{\psi}\,\vec{\mathbf{e}}_3$$

$$\text{Moment : } \vec{\mathbf{V}}_{S/R}(A) = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\overrightarrow{\mathbf{OA}}\Big|_R = \dot{x}_i\,\vec{\mathbf{e}}_i$$

- En général, des considérations cinématiques imposent le choix de A et celui de ($\vec{\mathbf{u}}_1$, $\vec{\mathbf{u}}_2$, $\vec{\mathbf{u}}_3$). Le point A sera confondu avec le centre de gravité G de S et ($\vec{\mathbf{u}}_1$, $\vec{\mathbf{u}}_2$, $\vec{\mathbf{u}}_3$) sera une base dans laquelle la matrice d'inertie en G est diagonale.
- Il n'y à pas de relation générale de composition des accélérations, car elles ne constituent pas le champ des moments d'un torseur.
- Pour les trois référentiel R, R' et S « solide », on établit :

$$\vec{\mathbf{\Gamma}}_{S/R}(M) = \vec{\mathbf{\Gamma}}_{S/R'}(M) + \vec{\mathbf{\Gamma}}_{R'/R} + 2.\ \overrightarrow{\mathbf{\Omega}}_{R'/R} \wedge \vec{\mathbf{V}}_{S/R'}(M)$$

En pratique, on dérive en repère mobile et on n'utilise pas cette formule.